révision

Intégration

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Déterminer si elle existe la limite : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x}$.

Exercice 2

a. Déterminer de deux manières différentes un développement limité en 0 à l'ordre $n+2$ de $f : x \mapsto (1-\mathrm{e}^x)^n$.

b. En déduire la valeur de $\displaystyle S_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p$ pour $p \in [\![0, n+1]\!]$.

Exercice 3

Prouver la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln t}}{(t-1)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $a \in \mathbb{R}$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que pour tout $b \geqslant a$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 5

Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(2t)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7

a. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b. En admettant que $f(0) = \sqrt{\pi}$, exprimer $f(x)$ sans symbole intégral.

c. Démontrer que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \sin(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. Trouver une relation entre f et g, et en déduire la valeur de g.

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable.

On appelle *transformée de Laplace* de f la fonction $\mathrm{L}(f) : p \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que $\mathrm{L}(f)$ est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$.

b. Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathrm{L}(f)$.

c. Montrer que $\mathrm{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On suppose désormais f bornée sur $\mathbb{R}_+$, et $f(0) \neq 0$.

d. Justifier que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \int_0^{+\infty} p\,\mathrm{e}^{-pt}|f(t)-f(0)|\,\mathrm{d}t = 0$ et en déduire que $\displaystyle\mathrm{L}(f)(p) \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{f(0)}{p}$.