corrigé

Intégration

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Déterminer si elle existe la limite : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x}$.

f est de classe $\mathscr{C}^2$ donc $f(x) \underset{0}{=} f(0) + xf'(0) + \dfrac{x^2}{2}f''(0) + \mathrm{o}(x^2)$ et $f'(x) \underset{0}{=} f'(0) + xf''(0) + \mathrm{o}(x)$. Ainsi,

$$f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x} \underset{0}{=} f'(0) + xf''(0) - f'(0) - \frac{x}{2}f''(0) + \mathrm{o}(x)$$

et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x} = \dfrac{f''(0)}{2}$.

Exercice 2

a. Déterminer de deux manières différentes un développement limité en 0 à l'ordre $n+1$ de $f : x \mapsto (1-\mathrm{e}^x)^n$.

b. En déduire la valeur de $\mathrm{S}_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^p$ pour $p \in [\![0, n+1]\!]$.

a. D'après la formule du binôme, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \mathrm{e}^{kx}$. Or $\mathrm{e}^{kx} \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{p=0}^{n+1} \frac{k^p}{p!}x^p + \mathrm{o}(x^{n+1})$ et en inversant les deux sommes (finies) :

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{p=0}^{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^p\right)\frac{x^p}{p!} + \mathrm{o}(x^{n+1})$$

Par ailleurs, $1 - \mathrm{e}^x \underset{0}{=} -x - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2) \underset{0}{=} (-x)\left(1 + \dfrac{x}{2} + \mathrm{o}(x)\right)$ donc

$$\begin{aligned}(1-\mathrm{e}^x)^n &= (-x)^n\left(1 + \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x)\right)^n = (-x)^n\left(1 + n\frac{x}{2} + \mathrm{o}(x)\right)\\ &= (-1)^n x^n + (-1)^n\frac{n}{2}x^{n+1} + \mathrm{o}(x^{n+1})\end{aligned}$$

b. Par unicité du développement limité on en déduit que $\mathrm{S}_{n,p} = 0$ si $p < n$, $\mathrm{S}_{n,n} = (-1)^n n!$ et $\mathrm{S}_{n,n+1} = (-1)^n \dfrac{n}{2}(n+1)!$.

Exercice 3

Prouver la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln t}}{(t-1)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$$

a. Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t^2-1}} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-t})$ donc $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$ converge.

On pose $u = t-1$. Alors $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$ a même nature que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{2u+u^2}}\,\mathrm{d}u$. Or $\dfrac{\mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{2u+u^2}} \underset{0}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}}\right)$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$ converge. On en conclut que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t$ converge.

b. Au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{\sqrt{\ln t}}{(t-1)\sqrt{t}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{\ln t}}{t^{3/2}} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ avec $1 < \alpha < \dfrac{3}{2}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln t}}{(t-1)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge.

c. On pose $u = t-1$. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln t}}{(t-1)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ a même nature que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{\ln(1+u)}}{u\sqrt{1+u}}\,\mathrm{d}u$. Or $\displaystyle\frac{\sqrt{\ln(1+u)}}{u\sqrt{1+u}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{u}}$ donc $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln t}}{(t-1)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge. On en conclut que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln t}}{(t-1)\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge.

d. Une intégration par parties donne $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \cos 1 - \frac{\cos x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ converge absolument car $\displaystyle\frac{\cos t}{t^{3/2}} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\frac{1}{t^{3/2}}\Big)$ donc $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ possède une limite lorsque x tend vers $+\infty$, ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge.

e. Le changement de variable bijectif $u = t^2$ montre que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ ont même nature. Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ est faussement impropre et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ converge d'après la question précédente, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $a \in \mathbb{R}$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que pour tout $b \geqslant a$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{d}t$ converge.

Posons $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$. Alors : $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \mathrm{F}'(t)\mathrm{e}^{-(b-a)t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(x)\mathrm{e}^{-(b-a)x} + (b-a)\int_0^x \mathrm{F}(t)\mathrm{e}^{-(b-a)t}\,\mathrm{d}t$.
Par hypothèse F possède une limite en $+\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x)\mathrm{e}^{-(b-a)x} = 0$ et $\mathrm{F}(t)\mathrm{e}^{-(b-a)t} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\big(\mathrm{e}^{-(b-a)t}\big)$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{F}(t)\mathrm{e}^{-(b-a)t}\,\mathrm{d}t$ converge absolument. Ceci montre que $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{d}t$ possède une limite en $+\infty$, donc que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-bt}\,\mathrm{d}t$ converge.
Attention. Ne pas confondre intégrale convergente et fonction intégrable. Si on avait supposé la fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-at}$ intégrable, autrement dit si on avait supposé $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ absolument convergente, le raisonnement aurait été beaucoup plus simple : il aurait suffit de dire que $f(t)\mathrm{e}^{-bt} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\big(f(t)\mathrm{e}^{-at}\big)$ pour conclure grâce aux théorèmes de comparaison.

Exercice 5

Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.

Même remarque que pour l'exercice précédent : si on suppose f intégrable la question est simple puisque $\displaystyle\frac{f(t)}{t^\alpha} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\big(f(t)\big)$ donc les théorèmes de comparaison s'appliquent.
Dans le cas général on pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors $\displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{F}(x)}{x^\alpha} + \alpha\int_1^x \frac{\mathrm{F}(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$. F possède une limite en $+\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{F}(x)}{x^\alpha} = 0$ et $\displaystyle\frac{\mathrm{F}(t)}{t^{\alpha+1}} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\Big)$. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha+1}}$ converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{F}(t)}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$ converge absolument. On en déduit que $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{f(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ possède une limite en $+\infty$, ce qui assure que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(2t)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Le changement de variable $u = 2t$ donne $\displaystyle\int_1^x \frac{f(2t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_2^{2x} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ donc

$$\int_1^x \frac{f(2t)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_2^{2x} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_1^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^2 \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $A > 0$ tel que pour $t \geqslant A$ on a $|f(t)| \leqslant \epsilon$. Ainsi, pour $x \geqslant A$, $\displaystyle\left|\int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \epsilon \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \epsilon \ln 2$.

Ceci prouve que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = 0$ donc que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(2t)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle-\int_1^2 \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7

a. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

b. En admettant que $f(0) = \sqrt{\pi}$, exprimer $f(x)$ sans symbole intégral.

c. Démontrer que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \sin(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. Trouver une relation entre f et g, et en déduire la valeur de g.

a. On pose $g(x,t) = \mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{e}^{-t^2}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|g(x,t)| = \mathrm{e}^{-t^2} \underset{\pm\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-|t|})$ donc $t \mapsto g(x,t)$ est $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}$ et intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve que f est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = it\,\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{e}^{-t^2}$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}$ et $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = |t|\mathrm{e}^{-t^2} = \phi(t)$. La fonction ϕ est $\mathscr{C}^0_{\mathrm{pm}}$ et intégrable sur $\mathbb{R}$ car $\phi(t) \underset{\pm\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-|t|})$ donc le théorème de dérivation des intégrales à paramètre s'applique : f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} it\,\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

b. On réalise une intégration par parties (en intégrant $t\,\mathrm{e}^{-t^2}$ et en dérivant $i\,\mathrm{e}^{itx}$) :

$$\int_a^b it\,\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{i}{2}\mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{e}^{-t^2}\right]_a^b - \frac{x}{2}\int_a^b \mathrm{e}^{itx}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

En faisant tendre a vers $-\infty$ et b vers $+\infty$ on obtient $f'(x) = -\dfrac{x}{2}f(x)$, donc $f(x) = f(0)\mathrm{e}^{-x^2/4} = \sqrt{\pi}\,\mathrm{e}^{-x^2/4}$.

c. Pour tout $x > 0$, $\left|\mathrm{e}^{-xt}\sin(\sqrt{t})\right| \leqslant \mathrm{e}^{-xt}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc $g(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$.

d. Le changement de variable bijectif $u = \sqrt{xt}$ fournit l'expression $g(x) = \dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^{+\infty} u\,\mathrm{e}^{-u^2}\sin\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}u$.

Une intégration par parties donne alors :

$$g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\cos\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{2x^{3/2}}\,\mathfrak{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{iu/\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right) = \frac{1}{2x^{3/2}} f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}\,\mathrm{e}^{-1/(4x)}.$$

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable.

On appelle *transformée de Laplace* de f la fonction $\mathrm{L}(f) : p \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que $\mathrm{L}(f)$ est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$.

b. Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathrm{L}(f)$.

c. Montrer que $\mathrm{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On suppose désormais f bornée sur $\mathbb{R}_+$, et $f(0) \neq 0$.

d. Justifier que $\lim\limits_{p\to+\infty} \int_0^{+\infty} p\,\mathrm{e}^{-pt} |f(t) - f(0)|\,\mathrm{d}t = 0$ et en déduire que $\mathrm{L}(f)(p) \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{f(0)}{p}$.

a. On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètre :

- pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $p \mapsto \mathrm{e}^{-pt} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$;
- pour tout $x \geqslant 0$, $\left|\mathrm{e}^{-pt} f(t)\right| \leqslant |f(t)| = \phi(t)$;

La fonction ϕ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc la fonction $\mathrm{L}(f)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, pour tout $p \geqslant 0$, $\left|\mathrm{L}(f)(p)\right| \leqslant \int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ donc $\mathrm{L}(f)$ est une fonction bornée.

b. On applique le théorème d'interversion limite / intégrale :

- pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $p \mapsto \mathrm{e}^{-pt} f(t)$ possède une limite (nulle) en $+\infty$;
- pour tout $x \geqslant 0$, $\left|\mathrm{e}^{-pt} f(t)\right| \leqslant |f(t)| = \phi(t)$;

La fonction ϕ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty} \mathrm{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{p\to+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

c. Notons $g : (p,t) :\mapsto \mathrm{e}^{-pt} f(t)$ et appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$, $\alpha > 0$:

- pour tout $t \geqslant 0$, la fonction $p \mapsto g(p,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\partial^n g}{\partial p^n}(p,t) = (-t)^n \mathrm{e}^{-pt} f(t)$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \geqslant 0$, $\left|\dfrac{\partial^n g}{\partial p^n}(p,t)\right| \leqslant t^n \mathrm{e}^{-\alpha t} |f(t)| = \phi_n(t)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction ϕ_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $\phi_n(t) \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}(|f(t)|)$ (par croissances comparées) donc $\mathrm{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[\alpha, +\infty[$, puis sur $\mathbb{R}_+^*$ par recouvrement.

d. Soit $\epsilon > 0$. f est continue en 0 donc il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [0, \eta]$, $|f(t) - f(0)| \leqslant \epsilon$. On en déduit :

$$\int_0^{+\infty} p\,\mathrm{e}^{-pt} |f(t) - f(0)|\,\mathrm{d}t \leqslant \epsilon \int_0^{\eta} p\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t + \int_\eta^{+\infty} p\,\mathrm{e}^{-pt} |f(t) - f(0)|\,\mathrm{d}t = \epsilon(1 - \mathrm{e}^{-p\eta}) + \int_\eta^{+\infty} p\,\mathrm{e}^{-pt} |f(t) - f(0)|\,\mathrm{d}t$$

Une nouvelle application du théorème d'interversion limite / intégrale montre que $\lim\limits_{p\to+\infty} \int_\eta^{+\infty} p\,\mathrm{e}^{-pt} |f(t) - f(0)|\,\mathrm{d}t = 0$ donc il existe un rang à partir duquel $\int_0^{+\infty} p\,\mathrm{e}^{-pt} |f(t) - f(0)|\,\mathrm{d}t \leqslant 2\epsilon$. Autrement dit, $\lim\limits_{p\to+\infty} \int_0^{+\infty} p\,\mathrm{e}^{-pt} |f(t) - f(0)|\,\mathrm{d}t = 0$.

On a $\left|p\mathrm{L}(f)(p) - f(0)\right| \leqslant \int_0^{+\infty} p\,\mathrm{e}^{-pt} |f(t) - f(0)|\,\mathrm{d}t$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty} p\mathrm{L}(f)(p) = f(0)$, soit $\mathrm{L}(f)(p) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{f(0)}{p}$.