Espaces euclidiens

Produit scalaire

Bases orthonormées

Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormée, $(x,y)\in \mathrm{E}^2$ et $\mathrm{X}=\mathrm{Mat}_{(e)}(x)=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $\mathrm{Y}=\mathrm{Mat}_{(e)}(y)=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ alors :

- $\forall k\in[\![1,n]\!],\ x_k=\langle e_k\mid x\rangle$;
- $\langle x\mid y\rangle=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}$.

Si $\mathrm{A}=\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ alors $a_{ij}=\langle e_i\mid u(e_j)\rangle$.

Projection orthogonale

Si H est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, le projeté orthogonal $p(x)$ de x sur H est défini par :

- $p(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\langle e_i\mid x\rangle e_i$ où (e) est une base orthonormée de H ;
- c'est l'unique vecteur vérifiant $p(x)\in\mathrm{H}$ et $x-p(x)\in\mathrm{H}^{\perp}$;
- c'est l'unique vecteur réalisant le minimum de $\|x-u\|$ où $u\in\mathrm{H}$ (la *distance* de x à H).

Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Si $(v_1,\dots,v_n)$ est une famille libre, il existe une unique famille orthonormée $(e_1,\dots,e_n)$ vérifiant :

- $\forall k\in[\![1,n]\!],\ \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)=\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_k)$;
- $\forall k\in[\![1,n]\!],\ \langle e_k\mid v_k\rangle>0$.

On a $e_k=\dfrac{v_k-p_{k-1}(v_k)}{\|v_k-p_{k-1}(v_k)\|}$ où p_{k-1} est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_{k-1})=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_{k-1})$.

Endomorphismes d'un espace euclidien

Isométries vectorielles

$u\in\mathcal{O}(\mathrm{E})$ vérifie : $\forall(x,y)\in\mathrm{E}^2,\ \langle u(x)\mid u(y)\rangle=\langle x\mid y\rangle$.
Si (e) est une base orthonormée, $\mathrm{A}=\mathrm{Mat}_{(e)}(u)\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ vérifie $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}=\mathrm{I}_n$.
Si (e) et (e') sont deux bases orthonormées, $\mathrm{P}=\mathrm{Mat}_{(e)}(e')\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Lorsque $\dim\mathrm{E}=2$, les isométries vectorielles sont de deux types :

- si $\det u=1$, u est une rotation, et *dans toute base orthonormée directe* (e), $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$;
- si $\det u=-1$, u est une symétrie orthogonale, et *il existe une base orthonormée directe* (e) telle que $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

Endomorphismes symétriques

$u\in\mathcal{S}(\mathrm{E})$ vérifie : $\forall(x,y)\in\mathrm{E}^2,\ \langle u(x)\mid y\rangle=\langle x\mid u(y)\rangle$.
Si (e) est une base orthonormée, $\mathrm{A}=\mathrm{Mat}_{(e)}(u)\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}=\mathrm{A}$.
Tout endomorphisme symétrique se diagonalise dans une base orthonormée. Si A est une matrice symétrique réelle il existe $\mathrm{P}\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $\mathrm{A}=\mathrm{PDP}^{\mathrm{T}}$.
Soit $u\in\mathcal{S}(\mathrm{E})$. Il y a équivalence entre :

(i) $\forall x\in\mathrm{E},\ \langle u(x)\mid x\rangle\geqslant 0$;

(ii) $\mathrm{Sp}(u)\subset\mathbb{R}_+$.

Un tel endomorphisme symétrique est dit *positif*.
Soit $u\in\mathcal{S}(\mathrm{E})$. Il y a équivalence entre :

(i) $\forall x\in\mathrm{E}\setminus\{0_{\mathrm{E}}\},\ \langle u(x)\mid x\rangle>0$;

(ii) $\mathrm{Sp}(u)\subset\mathbb{R}_+^*$.

Un tel endomorphisme symétrique est dit *défini positif*.