Corrigé : interrogation sur les espaces euclidiens

Exercice 1

a) (b) est une base donc il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ dans $\mathbb{R}$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k$. Par linéarité on en déduit $\|x\|^2 = 0$, soit $x = 0_E$.

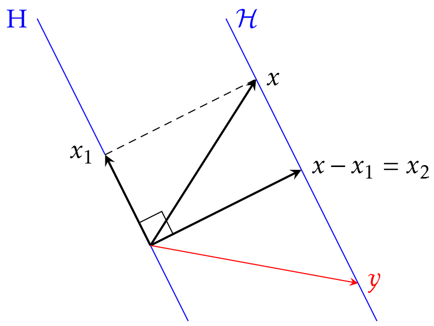
b) Considérons l'application $\phi : E \to \mathbb{R}^n$ définie par $\phi(x) = \big(\langle b_1 \mid x\rangle,\dots,\langle b_n \mid x\rangle\big)$. Il s'agit d'une application linéaire, injective d'après la première question. Puisque $\dim E = n = \dim \mathbb{R}^n$, ϕ est un isomorphisme donc tout $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ possède un unique antécédent.

Exercice 2

Notons p cette projection. Pour tout $x \in E$ on a $p(x) = \langle a \mid x\rangle a$. En notant (e) la base canonique de $\mathbb{R}^n$ on a $p(e_j) = a_j a$. les coordonnées de ce vecteur se retrouvent dans la j^{e} colonne de la matrice de la projection ; cette dernière est donc égale à $(a_i a_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
Autre preuve : on identifie les vecteurs x et a aux matrices colonnes X et A. Alors $p(X) = \langle A \mid X\rangle A = (A^T X)A$ et puisque $A^T X$ est un scalaire on peut aussi écrire $p(X) = A(A^T X) = (AA^T)X$ donc la matrice demandée est AA^T.

Exercice 3

Commençons par faire un dessin :



Posons $x_2 = x - x_1$. On a $x_2 \in H^\perp$ et $x_2 \in \mathcal{H}$ puisque $x \in \mathcal{H}$ et $x_1 \in H$.
Pour tout $y \in \mathcal{H}$ on a $y = x_2 + (y - x_2)$. par ailleurs, $y \in \mathcal{H}$ et $x_2 \in \mathcal{H}$ donc $y - x_2 \in H$ et ainsi $\langle x_2 \mid y - x_2\rangle = 0$. D'après le théorème de Pythagore on a donc $\|y\|^2 = \|x_2\|^2 + \|y - x_2\|^2 \geqslant \|x_2\|^2$ avec égalité si (et seulement si) $y = x_2$, ce qui prouve que $\inf_{y\in\mathcal{H}} \|y\| = \|x_2\| = \|x - x_1\|$.

Exercice 4

Soit $(f_1,\dots,f_p)$ une base orthonormée de H. Alors $e'_k = \sum_{i=1}^{p} \langle f_i \mid e_k\rangle f_i$ et $\|e'_k\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \langle f_i \mid e_k\rangle^2$. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} \|e'_k\|^2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} \langle f_i \mid e_k\rangle^2 = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} \langle f_i \mid e_k\rangle^2 = \sum_{i=1}^{p} \|f_i\|^2 = p = \dim H$$

Exercice 5

Toute projection orthogonale est diagonalisable dans une base orthonormée donc il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^T$ avec $D = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$. Notons $(E_1,\dots,E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$; alors $D = \sum_{k=1}^{r} E_k E_k^T$.

On en déduit que $A = \sum_{k=1}^{r} PE_k E_k^T P^T = \sum_{k=1}^{r} X_k X_k^T$ avec $X_k = PE_k$.

Exercice 6

u est symétrique donc diagonalisable dans une base orthonormée (e). Posons $u(e_k)=\lambda_k e_k$; sans perte de généralité on peut supposer $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$, de sorte que $\max\big(\mathrm{Sp}(u)\big)=\lambda_n$.

Pour tout $x\in \mathrm{E}$, posons $x=\sum_{k=1}^{n} x_k e_k$. Alors $u(x)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k e_k$ donc $\langle x \mid u(x)\rangle = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k^2 \leqslant \lambda_n \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \lambda_n \|x\|^2$ et ainsi, pour $x\neq 0_{\mathrm{E}}$, $\dfrac{\langle x\mid u(x)\rangle}{\|x\|^2}\leqslant \lambda_n$. Cette majoration est atteinte pour $x=e_n$, donc $\max\limits_{x\neq 0_{\mathrm{E}}} \dfrac{\langle x\mid u(x)\rangle}{\|x\|^2}=\lambda_n$.

Exercice 7

a) A est symétrique réelle donc diagonalisable. Elle est donc semblable à $\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. A^2 est donc semblable à $\mathrm{diag}(\lambda_1^2,\ldots,\lambda_n^2)$ et ainsi, $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^2)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2$.

Par ailleurs, le coefficient de rang (i,i) de A^2 vaut $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ji}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2$ donc $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2$. D'où l'égalité.

b) Si $\chi_{\mathrm{A}}(x)=(x-a_{11})\cdots(x-a_{nn})$ alors $\mathrm{Sp}(\mathrm{A})=\{a_{11},\ldots,a_{nn}\}$ et ainsi, $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^2)=\sum_{k=1}^{n}a_{kk}^2$. D'après la question précédente on en déduit que $\sum_{i\neq j}a_{ij}^2=0$, soit $i\neq j \implies a_{ij}=0$. La matrice A est diagonale.

Exercice 8

a) C'est sensiblement la même démarche que dans l'exercice 6, mais matriciellement : A est diagonalisable dans une base orthonormée donc il existe $\mathrm{P}\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{D}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda)$ diagonale telles que $\mathrm{A}=\mathrm{PDP}^{\mathrm{T}}$. Alors $\langle \mathrm{X}\mid \mathrm{AX}\rangle = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{PDP}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} = \mathrm{YDY}^{\mathrm{T}}$ avec $\mathrm{Y}=\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}$. Ainsi, $\langle \mathrm{X}\mid\mathrm{AX}\rangle=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k y_k^2$.

Si $\mathrm{A}\in\mathcal{K}$ alors $\big|\langle\mathrm{X}\mid\mathrm{AX}\rangle\big|\leqslant\sum_{k=1}^{n}y_k^2=\|\mathrm{Y}\|^2=\|\mathrm{P}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}\|^2=\|\mathrm{X}\|^2$ puisque P est orthogonale.

Réciproquement, si pour tout $\mathrm{X}\in\mathrm{E}$, $\big|\langle\mathrm{X}\mid\mathrm{AX}\rangle\big|\leqslant\|\mathrm{X}\|^2$, on applique cette majoration à un vecteur propre X_k associé à la valeur propre λ_k pour obtenir $|\lambda_k|.\|\mathrm{X}\|^2\leqslant\|\mathrm{X}\|^2$, soit $|\lambda_k|\leqslant 1$ puisque $\mathrm{X}_k\neq 0$. On a bien $\mathrm{A}\in\mathcal{K}$.

b) C'est cette fois-ci semblable à l'exercice 7 : $[\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}]_{jj}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2$ donc $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2$.

Par ailleurs, $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}=\mathrm{A}^2=\mathrm{PD}^2\mathrm{P}^{\mathrm{T}}$ donc $|\mathrm{tr}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A})|=|\mathrm{tr}(\mathrm{D})|\leqslant\Big|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2\Big|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|^2\leqslant n$ car $\mathrm{A}\in\mathcal{K}$, donc $\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2\leqslant n$.

c) La question précédente montre que pour la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{K}$ est inclus dans la boule fermée de centre O (la matrice nulle) et de rayon $\sqrt{n}$, donc $\mathcal{K}$ est bornée.

Pour montrer que $\mathcal{K}$ est fermé, considérons une suite (A_p) de matrices de $\mathcal{A}$ qui converge vers une matrice A. D'après la première question, pour tout $p\in\mathbb{N}$ et tout $\mathrm{X}\in\mathrm{E}$, $\big|\langle\mathrm{X}\mid\mathrm{A}_p\mathrm{X}\rangle\big|\leqslant\|\mathrm{X}\|^2$. En faisant tendre p vers $+\infty$ on obtient $\big|\langle\mathrm{X}\mid\mathrm{AX}\rangle\big|\leqslant\|\mathrm{X}\|^2$ donc $\mathrm{A}\in\mathcal{K}$, ce qui montre que $\mathcal{K}$ est un fermé.

d) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\big|\langle\mathrm{X}\mid\mathrm{BX}\rangle\big|\leqslant\|\mathrm{X}\|.\|\mathrm{BX}\|=\|\mathrm{X}\|^2$ car $\mathrm{B}\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Il en est de même avec B^{T} puisque $\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, donc :

$$\big|\langle\mathrm{X}\mid\mathrm{AX}\rangle\big|\leqslant\frac{1}{2}\Big(\big|\langle\mathrm{X}\mid\mathrm{BX}\rangle\big|+\big|\langle\mathrm{X}\mid\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}\rangle\big|\Big)\leqslant\frac{1}{2}\big(\|\mathrm{X}\|^2+\|\mathrm{X}\|^2\big)=\|\mathrm{X}\|^2$$

donc $\mathrm{A}\in\mathcal{K}$ d'après la première question.