révision

Espaces euclidiens

Exercice 1

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique.

a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{H}$ des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et en donner la dimension.

b. Soit J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer $\mathrm{d}(\mathrm{J}, \mathcal{H})$.

Exercice 2

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\displaystyle\min_{\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{i,j} (a_{ij} - m_{ij})^2$.

Exercice 3

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Pour P et Q dans E on pose $\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{Q} \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

a. Justifier que $\langle \mathrm{P} \mid \mathrm{Q} \rangle$ existe pour tout P et Q dans E, et qu'on définit ainsi un produit scalaire.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $\mathrm{T}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{T}_n(\cos x) = \cos(nx)$.
Préciser le degré et le coefficient dominant de T_n.

c. Montrer que la famille (T_n) est orthogonale, et en déduire la valeur de $\displaystyle\inf_{\mathrm{P} \in \mathrm{U}_n} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{P}(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ pour $n \geqslant 1$, où U_n désigne l'ensemble des polynômes unitaires de degré n.

Exercice 4

Soit E un espace préhilbertien et A une partie non vide de E supposée convexe, fermée et bornée.
On rappelle que la *distance* de $x \in \mathrm{E}$ à A est définie par : $\mathrm{d}(x, \mathrm{A}) = \inf\left\{\|x - a\| \;\middle|\; a \in \mathrm{A}\right\}$.

a. Soit $x \in \mathrm{E}$. Montrer qu'il existe un unique $a_0 \in \mathrm{A}$ tel que $\mathrm{d}(x, \mathrm{A}) = \|x - a_0\|$. On note $a_0 = p_{\mathrm{A}}(x)$; c'est le *projeté* de x sur A. (Attention, ce n'est pas une application linéaire).

b. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{E}$ on a : $\forall y \in \mathrm{A}$, $\left\langle x - p_{\mathrm{A}}(x) \;\middle|\; y - p_{\mathrm{A}}(x) \right\rangle \leqslant 0$.

Exercice 5

Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_n$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{U}_k^{\mathrm{T}} \mathrm{U}_k = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{S} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathrm{U}_k \mathrm{U}_k^{\mathrm{T}}$$

Exercice 6

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $\mathrm{B} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{B}$.

Exercice 7

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive.

a. Montrer que l'application $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mapsto \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathrm{Y}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

b. En déduire l'existence d'une matrice triangulaire supérieure U telle que $\mathrm{A} = \mathrm{U}^{\mathrm{T}}\mathrm{U}$.
Indication. Utiliser la méthode de Gram-Schmidt.
Justifier que si on impose de plus les coefficients diagonaux de U strictement positifs, cette décomposition est unique (*décomposition de Cholesky*).

Exercice 8

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, muni d'une base orthonormée $(e) = (e_1, \ldots, e_n)$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. On note $G = A^T A$ avec $A = (a_{ij})$ où a_{ij} est la i^e coordonnée de x_j dans la base (e).

a. Exprimer G à l'aide du produit scalaire de E.

b. Montrer que G est diagonalisable à valeurs propres positives. trouver une condition nécessaire et suffisante pour que ses valeurs propres soient strictement positives.

c. Montrer qu'il existe $(y_1, \ldots, y_n) \in E^n$ tel que pour tout i, $\|y_i\| = 1$ et $i \neq j \Longrightarrow \|y_i - y_j\| = 1$.

Exercice 9

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien tel que pour tout $x \in E$, $\langle u(x) \mid x \rangle = 0$.

a. Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x) \mid y \rangle = -\langle x \mid u(y) \rangle$. On dit que u est un endomorphisme *antisymétrique*.

b. Montrer qu'un endomorphisme u de E est antisymétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est antisymétrique.

c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que ses valeurs propres sont des imaginaires purs.

d. Montrer que si u est antisymétrique et H un sous-espace vectoriel stable par u, alors $H^\perp$ est aussi stable par u.

e. En déduire que si u est un endomorphisme antisymétrique, il existe une base orthonormée (e) telle que $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ est diagonale par blocs, avec sur la diagonale des zéros ou des blocs de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$.