corrigé

Espaces euclidiens

Exercice 1

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique.

a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{H}$ des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et en donner la dimension.

b. Soit J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer $d(J,\mathcal{H})$.

a. La trace est une application linéaire donc $\mathcal{H} = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Son image est égale à $\mathbb{R}$ donc la trace est de rang 1, et d'après le théorème du rang, $\dim \mathcal{H} = n^2 - 1$.

b. Pour tout $H \in \mathcal{H}$, $\langle I_n \mid H\rangle = \mathrm{tr}\, H = 0$ donc $\mathcal{H}^\perp = \mathrm{Vect}(I_n)$.

La projection orthogonale de J sur $\mathrm{Vect}(I_n)$ vaut : $\left\langle J \;\middle|\; \dfrac{I_n}{\|I_n\|}\right\rangle \dfrac{I_n}{\|I_n\|} = I_n$ car $\|I_n\| = \sqrt{n}$ et $\langle J \mid I_n\rangle = n$.

On en déduit que $d(J,\mathcal{H}) = \|I_n\| = \sqrt{n}$.

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\displaystyle\min_{M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{i,j} (a_{ij} - m_{ij})^2$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $\langle A \mid B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B) = \displaystyle\sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$. Pour ce produit scalaire, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux puisque si S et symétrique et A antisymétrique, $\langle S \mid A\rangle = \mathrm{tr}(S^T A) = \mathrm{tr}(SA) = \mathrm{tr}(AS) = -\mathrm{tr}(A^T S) = -\langle A \mid S\rangle$ donc $\langle S \mid A\rangle = 0$.
Il s'agit donc de minimiser $\|A - M\|^2$ pour $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Ce minimum est atteint lorsque $M = p(A)$ est la projection orthogonale de A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, soit $M = \dfrac{1}{2}(A + A^T)$. Ce minimum vaut alors $\left\|\dfrac{1}{2}(A - A^T)\right\|^2 = \dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{i,j}(a_{ij} - a_{ji})^2$.

Exercice 3

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour P et Q dans E on pose $\langle P \mid Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$.

a. Justifier que $\langle P \mid Q\rangle$ existe pour tout P et Q dans E, et qu'on définit ainsi un produit scalaire.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos x) = \cos(nx)$.
Préciser le degré et le coefficient dominant de T_n.

c. Montrer que la famille (T_n) est orthogonale, et en déduire la valeur de $\displaystyle\inf_{P\in U_n} \int_{-1}^{1} \frac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ pour $n \geqslant 1$, où U_n désigne l'ensemble des polynômes unitaires de degré n.

a. Au voisinage de 1, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$ donc $\left|\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \underset{1}{=} O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$. Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ converge, donc il en est de même de $\displaystyle\int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$. On procède de même sur $]-1,0]$, sachant que $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \underset{-1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+t}}$.
La bilinéarité, la symétrie, la positivité sont évidentes. Enfin, si $\langle P \mid P\rangle = 0$ alors par continuité et positivité on a pour tout $t \in -1,1[$, $P(t)^2 = 0$ donc P possède une infinité de racines et donc $P = 0$. Il s'agit bien d'un produit scalaire.

b. Raisonnons par récurrence sur n.

- Si $n = 0$ on a nécessairement $T_0 = 1$.
- Si $n = 1$ on a nécessairement $T_1 = X$.
- Si $n \geqslant 2$, supposons acquise l'existence de T_{n-1} et T_{n-2}.
  Utilisons la formule $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$ avec $a = (n-1)x$ et $b = x$.
  On obtient : $\cos(nx) + cos\big((n-2)x\big) = 2\cos\big((n-1)x\big)\cos x$ donc $\cos(nx) = 2\cos x\, T_{n-1}(\cos x) - T_{n-2}(\cos x)$. Il suffit donc de poser $T_n(X) = 2XT_{n-1}(X) - T_{n-2}(X)$ pour prouver l'existence de T_n.

Supposons maintenant l'existence d'un autre polynôme solution $\widetilde{T}_n$. Dans ce cas, lo polynôme $T_n - \widetilde{T}_n$ s'annule sur $[-1,1]$ donc possède une infinité de racines : c'est le polynôme nul.
Ceci assure donc l'existence et l'unicité de T_n, la récurrence se propage.

Remarque. les polynômes ainsi définis s'appellent les *polynômes de Tchebychev* ; ils sont défini par les relations :

$$T_0 = 1, \qquad T_1 = X, \qquad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2} \quad \text{pour } n \geqslant 2.$$

Ces relations permettent de prouver sans peine par récurrence que $\deg T_n = n$ et que le coefficient de T_n est égal à 2^{n-1} pour tout $n \geqslant 1$.

c. Le changement de variable $t = \cos x$ donne :

$$\langle T_p \mid T_q \rangle = \int_0^\pi T_p(\cos x)T_q(\cos x)\,dx = \int_0^\pi \cos(px)\cos(qx)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \Big(\cos\big((p+q)x\big) + \cos\big((p-q)x\big)\Big)dx$$

Sachant que $\displaystyle\int_0^\pi \cos(nx)\,dx = \begin{cases} \pi & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, on en déduit : $\langle T_p \mid T_q \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q \\ \pi/2 & \text{si } p = q \neq 0 \\ \pi & \text{si } p = q = 0 \end{cases}$

Soit $P \in U_n$ avec $n \geqslant 1$. Il se décompose dans la base $(T_0, \dots, T_n)$ sous la forme : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k T_k$, avec $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ puisqu'il est unitaire. Puisque la famille (T_k) est orthogonale, $\|P\|^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \|T_k\|^2$ et cette quantité est minimale lorsque $a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0$. La valeur minimale recherchée vaut donc $a_n^2 \|T_n\|^2 = \dfrac{\pi}{2^{2n-1}}$.

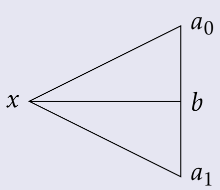
Exercice 4

Soit E un espace préhilbertien et A une partie non vide de E supposée convexe, fermée et bornée.
On rappelle que la *distance* de $x \in E$ à A est définie par : $d(x, A) = \inf\big\{\|x - a\| \mid a \in A\big\}$.

a. Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe un unique $a_0 \in A$ tel que $d(x, A) = \|x - a_0\|$. On note $a_0 = p_A(x)$; c'est le *projeté* de x sur A. (Attention, ce n'est pas une application linéaire).

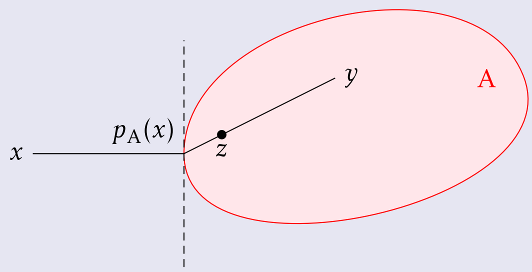
b. Montrer que pour tout $x \in E$ on a : $\forall a \in A, \big\langle x - p_A(x) \mid y - p_A(x)\big\rangle \leqslant 0$.

a. Fixons $x \in E$. L'application $\begin{pmatrix} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & \|x - a\| \end{pmatrix}$ est continue ; puisque A est fermé borné cette application est bornée et atteint ses bornes, en particulier sa borne inférieure.
Supposons que cette borne soit atteinte en deux points a_0 et a_1. Puisque A est convexe, $[a_0, a_1] \subset A$ et en particulier, $b = \dfrac{1}{2}(a_0 + a_1) \in A$. Guidons nous maintenant par un dessin :



$\langle b - x \mid a_1 - a_0 \rangle = \Big\langle \dfrac{a_0 + a_1}{2} - x \mid a_1 - a_0 \Big\rangle = \dfrac{1}{2}\Big\langle (a_1 - x) + (a_0 - x) \mid (a_1 - x) - (a_0 - x)\Big\rangle = \dfrac{1}{2}\Big(\|a_1 - x\|^2 - \|a_0 - x\|^2\Big) = 0.$
Les vecteurs $b - x$ et $a_0 - b$ sont orthogonaux donc d'après le théorème de Pythagore, $\|b - x\|^2 = \|x - a_0\|^2 - \|b - a_0\|^2 < \|x - a_0\|^2$ et ainsi $\|x - b\| < \|x - a_0\|$, ce qui contredit le caractère minimal de $\|x - a_0\|$. Le minimum est bien atteint en un unique point.

b. Illustrons de nouveau la situation avec un dessin :



Soit $t \in]0,1[$ et $z = p_A(x) + t(y - p_A(x))$. $z \in [p_A(x), y]$ donc $z \in A$ puisque A est convexe.
Par définition on a $\|x - p_A(x)\|^2 \leqslant \|x - z\|^2 = \|x - p_A(x)\|^2 - 2t\langle x - p_A(x) \mid y - p_A(x)\rangle + t^2\|y - p_A(x)\|^2$.
On a pour tout $t \in]0,1[$, $2\langle x - p_A(x) \mid y - p_A(x)\rangle \leqslant t\|y - p_A(x)\|^2$, et en faisant tendre t vers 0 : $\langle x - p_A(x) \mid y - p_A(x)\rangle \leqslant 0$.

Exercice 5

Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{R}$ et $U_1, \dots, U_n$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad U_k^T U_k = 1 \qquad \text{et} \qquad S = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k U_k U_k^T$$

S est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée : il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tels que $S = PDP^T = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P E_{kk} P^T$ où (E_{ij}) représente la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Notons $(X_1, \dots, X_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a $E_{kk} = X_k X_k^T$ donc $S = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k U_k U_k^T$ avec $U_k = PX_k$.

Enfin, sachant que (X_k) est une base orthonormée et que $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, la famille (U_k) est elle aussi orthonormée, et ainsi $U_k^T U_k = \langle U_k \mid U_k \rangle = 1$.
Remarque. Il résulte de ceci qu'on a aussi $U_i^T U_j = 0$ pour $i \neq j$.

Exercice 6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^T B$.

Supposons $A = B^T B$ avec B inversible. Alors $A^T = B^T B = A$ donc A est symétrique, et pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X \neq 0$, $X^T A X = X^T B^T B X = \|BX\|^2 > 0$ car $X \neq 0 \implies BX \neq 0$ (B est inversible).
Réciproquement, supposons $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_k > 0$ tel que $A = PDP^T$. En posant $B = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})P^T$ on a bien $B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $A = B^T B$.

Exercice 7

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive.

a. Montrer que l'application $(X, Y) \mapsto X^T A Y$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

b. En déduire l'existence d'une matrice triangulaire supérieure U telle que $A = U^T U$.

Indication. Utiliser la méthode de Gram-Schmidt.
Justifier que si on impose de plus les coefficients diagonaux de U strictement positifs, cette décomposition est unique (*décomposition de Cholesky*).

Dans cet exercice on note $\langle X \mid Y \rangle = X^T A Y$; il ne s'agit donc pas du produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

a. Cette application est à l'évidence bilinéaire.

Elle est symétrique car $\langle Y \mid X \rangle = Y^T A X = (Y^T A X)^T$ (c'est un scalaire) $= X^T A^T Y = X^T A Y = \langle X \mid Y \rangle$.

Elle est définie positive car $\langle X \mid X\rangle = X^T AX \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $X = 0$ puisque A est supposée définie positive.

b. Notons $(E_1,\dots,E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour ce produit scalaire, cette base n'est pas orthonormée, mais on peut lui appliquer le procédé de Gram-Schmidt : il existe une famille $(B_1,\dots,B_n)$ orthonormée pour ce produit scalaire qui vérifie : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{Vect}(B_1,\dots,B_k) = \mathrm{Vect}(E_1,\dots,E_k)$.

Si on pose $U = \mathrm{Mat}_{(B)}(E_1,\dots,E_n)$, cette condition impose à U d'être triangulaire supérieure.

Puisque (B) est orthonormée pour le produit scalaire, le coefficient de rang (i,j) de U^TU vaut $\langle E_i \mid E_j\rangle = E_i^T AE_j = a_{ij}$. On a donc bien $U^TU = A$.

Pour s'assurer de l'unicité dans la méthode de Gram-Schmidt on impose les conditions $\langle B_k \mid E_k\rangle > 0$; ce sont les coefficients qui apparaissent sur la diagonale de la matrice U.

Exercice 8

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, muni d'une base orthonormée $(e) = (e_1,\dots,e_n)$. Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de vecteurs de E. On note $G = A^TA$ avec $A = (a_{ij})$ où a_{ij} est la i^{e} coordonnée de x_j dans la base (e).

a. Exprimer G à l'aide du produit scalaire de E.

b. Montrer que G est diagonalisable à valeurs propres positives. trouver une condition nécessaire et suffisante pour que ses valeurs propres soient strictement positives.

c. Montrer qu'il existe $(y_1,\dots,y_n) \in E^n$ tel que pour tout i, $\|y_i\| = 1$ et $i \neq j \Longrightarrow \|y_i - y_j\| = 1$.

a. $a_{ij} = \langle e_i \mid x_j\rangle$. Le coefficient d'indice (i,j) de G est égal à : $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj} = \sum_{k=1}^n \langle e_k \mid x_i\rangle\langle e_k \mid x_j\rangle = \langle x_i \mid x_j\rangle$. G est la matrice de Gram des vecteurs $(x_1,\dots,x_n)$.

b. G est symétrique réelle donc diagonalisable. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(G)$ et $X \neq 0$ tel que $GX = \lambda X$. On a $A^TAX = \lambda X$ donc $X^TA^TAX = \lambda X^TX$, soit $\|AX\|^2 = \lambda\|X\|^2$. Puisque $X \neq 0$ on a $\lambda \geqslant 0$.

Si A est inversible (autrement dit si $(x_1,\dots,x_n)$ est libre) on peut même en déduire que $\lambda > 0$.

Réciproquement, supposons toutes les valeurs propres de G strictement positives. Alors G est inversible. Mais $\det G = (\det A)^2$ donc A est inversible.

c. $\|y_i - y_j\|^2 = \|y_i\|^2 - 2\langle y_i \mid y_j\rangle + \|y_j\|^2$ donc la condition $\|y_i - y_j\| = 1$ est équivalente à $\langle y_i \mid y_j\rangle = 1/2$.

On note $A = \mathrm{Mat}_{(e)}(y_1,\dots,y_n)$ et $G = A^TA$. On cherche A tel que

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/2 \\ 1/2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1/2 \\ 1/2 & \cdots & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(I+U) \quad \text{avec } U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

U est symétrique réelle donc diagonalisable ; elle est de rang 1 et sa trace vaut n donc il existe P orthogonale telle que $U = P\begin{pmatrix} n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}P^T$ et $G = P\begin{pmatrix} (n+1)/2 & & & \\ & 1/2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/2 \end{pmatrix}P^T$. Pour obtenir une matrice A vérifiant $A^TA = G$ on peut par exemple choisir $A = P\begin{pmatrix} \sqrt{(n+1)/2} & & & \\ & 1/\sqrt{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}P^T$.

Exercice 9

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien tel que pour tout $x \in E$, $\langle u(x) \mid x\rangle = 0$.

a. Montrer que pour tout $(x,y) \in E^2$, $\langle u(x) \mid y\rangle = -\langle x \mid u(y)\rangle$. On dit que u est un endomorphisme *antisymétrique*.

b. Montrer qu'un endomorphisme u de E est antisymétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est antisymétrique.

c. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que ses valeurs propres sont des imaginaires purs.

d. Montrer que si u est antisymétrique et H un sous-espace vectoriel stable par u, alors $H^\perp$ est aussi stable par u.

e. En déduire que si u est un endomorphisme antisymétrique, il existe une base orthonormée (e) telle que $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ est diagonale par blocs, avec sur la diagonale des zéros ou des blocs de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$.

a. On applique l'hypothèse à $x+y$ puis on développe :

$$\langle u(x+y) \mid x+y\rangle = 0 \iff \langle u(x) \mid x\rangle + \langle u(x) \mid y\rangle + \langle u(y) \mid x\rangle + \langle u(y) \mid y\rangle = 0 \iff \langle u(x) \mid y\rangle = -\langle x \mid u(y)\rangle$$

Notons que réciproquement, tout endomorphisme vérifiant cette dernière égalité vérifie *a fortiori* $\langle u(x) \mid x\rangle = 0$; il suffit en effet de poser $y = x$ pour obtenir cette égalité.

b. Dans une base orthonormée (e) on pose $A = \mathrm{Mat}_{(e)}(u)$. Alors u est antisymétrique si et seulement si pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X^T A^T Y = -X^T AY$, soit $X^T(A^T + A)Y = 0$.
Pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$, le vecteur $(A + A^T)Y$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ donc est nul. Ceci étant vrai pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$ on en déduit $A + A^T = 0$: A est antisymétrique. La réciproque est immédiate.

c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A, et $Z \in \mathbb{C}^n$, $Z \neq 0$ tel que $AZ = \lambda Z$. Alors $A\overline{Z} = \overline{\lambda}\,\overline{Z}$, et $\overline{Z}^T A^T = \overline{\lambda}\,\overline{Z}$, soit $\overline{Z}^T A = -\overline{\lambda}\,\overline{Z}$. On en déduit que $\overline{Z}^T AZ = \lambda \overline{Z}^T Z$ et $Z^T AZ = -\overline{\lambda}\,\overline{Z}^T Z$ donc $(\lambda + \overline{\lambda})\overline{Z}^T Z = 0$.

Mais $\overline{Z}^T Z = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 > 0$, donc $\lambda + \overline{\lambda} = 0$, soit $\lambda \in i\mathbb{R}$.

d. Soit $x \in H^\perp$. Pour tout $y \in H$, $\langle u(x) \mid y\rangle = -\langle x \mid u(y)\rangle = 0$ car $x \in H^\perp$ et $u(y) \in H$, donc $u(x) \in H^\perp$, et $H^\perp$ est bien stable par u.

e. Considérons un endomorphisme antisymétrique $u \in \mathcal{L}(E)$, et A sa matrice dans une base orthonormée (e) ; A est donc antisymétrique. Raisonnons maintenant par récurrence sur n.

- si $n = 1$, la seule matrice antisymétrique est la matrice nulle.
- Si $n > 1$, on suppose le résultat acquis jusqu'au rang $n-1$.
  Si u est l'endomorphisme nul, le résultat est évident.
  Dans le cas contraire A possède au moins une valeur propre complexe non nulle $\lambda = ia$ avec $a \in \mathbb{R}^*$. Soit $Z \in \mathbb{C}^n$, $Z \neq 0$, tel que $AZ = iaZ$. On pose $Z = X + iY$ avec $X, Y \in \mathbb{R}^n$. En identifiant parties réelle et imaginaire dans l'égalité $A(X + iY) = ia(X + iY)$ on obtient $AX = -aY$ et $AY = aX$.
  Notons x et y les vecteurs de E définis par $\mathrm{Mat}_{(e)}(x) = X$ et $\mathrm{Mat}_{(e)}(y) = Y$; on a $u(x) = -ay$ et $u(y) = ax$. Montrons maintenant que x et y sont orthogonaux : $a\langle x \mid y\rangle = \langle ax \mid y\rangle = \langle u(y) \mid y\rangle = 0$ et puisque $a \neq 0$, $\langle x \mid y\rangle = 0$.
  Notons par ailleurs que ces deux vecteurs sont non nuls (si l'un est nul, l'autre aussi et alors $Z = 0$) donc $e'_1 = \dfrac{x}{\|x\|}$ et $e'_2 = \dfrac{y}{\|y\|}$ constituent une famille orthonormée qui engendre un plan H stable par u et pour laquelle la matrice associée à l'induit de u sur H est $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$.
  On applique alors l'hypothèse de récurrence à $H^\perp$ pour conclure.