

Algèbre linéaire

Interprétation matricielle

Si (e) est une base de E , on associe à :

- un vecteur $x \in E$ le vecteur colonne $X = \text{Mat}_{(e)}(x) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de ses coordonnées ;
- une famille (x_1, \dots, x_n) de vecteurs la matrice carrée $P = \text{Mat}(e)(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- à un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ la matrice carrée $A = \text{Mat}_{(e)}(u(e_1), \dots, u(e_n)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si (e') est une nouvelle base de E et $P = \text{Mat}_{(e)}(e'_1, \dots, e'_n)$, on a $X' = P^{-1}X$ et $A' = P^{-1}AP$.

Base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On note (E_{ij}) la matrice dont tous les coefficients sont nuls hormis celui de rang (i, j) égal à 1. Alors $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

Polynômes de Lagrange

Si (x_0, x_1, \dots, x_n) désignent $n + 1$ scalaires deux à deux distincts, les polynômes $L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - x_i}{x_k - x_i}$ pour $0 \leq k \leq n$ constituent une base de $\mathbb{K}_n[X]$, et pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $P = \sum_{k=0}^n P(x_k)L_k$.

Projections vectorielles

p est une projection vectorielle si et seulement si $p \circ p = p$, et dans ce cas, p est la projection sur $\text{Im } p = \text{Ker}(\text{Id} - p)$, parallèlement à $\text{Ker } p$.

Trace d'un endomorphisme

$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ donc $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$; on peut donc définir $\text{tr}(u) = \text{tr}(\text{Mat}_{(e)}(u))$ où (e) est une base quelconque de E .

Théorème du rang

Si H est un supplémentaire de $\text{Ker } u$, l'application $x \mapsto u(x)$ réalise un isomorphisme entre H et $\text{Im } u$, avec pour conséquence : $\dim E - \dim(\text{Ker } u) = \dim(\text{Im } u)$.

Endomorphismes nilpotents

u est nilpotent d'indice p lorsque $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$. Si x est un vecteur tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$, la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre, avec pour conséquence que $p \leq n = \dim E$.

En outre, si u est nilpotent d'indice $n = \dim E$, cette famille est une base pour laquelle $\text{Mat}_{(e)}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.