

CORRIGÉ : INTERROGATION D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Exercice 1

On identifie une matrice M avec l'application linéaire $X \mapsto MX$ de \mathbb{K}^n , ce qui permet de parler d'image et noyau de matrice.

- a) On a $\text{Im}(AB) \subset \text{Im} A$ donc $\text{rg}(AB) \leq \text{rg} A$. On a $\text{Ker} B \subset \text{Ker}(AB)$ donc $n - \text{rg} B \leq n - \text{rg}(AB)$. D'où $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg} A, \text{rg} B)$.
 b) Si $M = XY^T$, d'après la question précédente, $\text{rg} M \leq \min(\text{rg} X, \text{rg} Y^T) \leq 1$.

Si $\text{rg} M \leq 1$ toutes les colonnes de M sont colinéaires à un même vecteur X , donc $M = \begin{pmatrix} y_1 X & \cdots & y_n X \end{pmatrix} = XY^T$.

Exercice 2

a) Posons $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$. Alors $MZ = 0 \iff \begin{cases} AX + CY = 0 \\ BY = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} AX = 0 \\ Y = 0 \end{cases}$ car B est inversible. Ainsi, $X \mapsto \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$ réalise un isomorphisme entre $\text{Ker} A$ et $\text{Ker} M$, et $\dim(\text{Ker} M) = \dim(\text{Ker} A)$.

- b) D'après le théorème du rang, $n - \text{rg} M = p - \text{rg} A$, soit $\text{rg} M = \text{rg} A + (n - p) = \text{rg} A + \text{rg} B$ car B est inversible.

Exercice 3

a) On a $u \circ u = 0 \iff \text{Im} u \subset \text{Ker} u$ donc (théorème du rang) $r \leq n - r$, soit $2r \leq n$.

b) On pose $b_1 = u(e_1), \dots, b_r = u(e_r)$. D'après le théorème du rang, (b_1, \dots, b_r) est une base de $\text{Im} u$, que l'on complète pour former une base $(b_1, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_{n-r})$ de $\text{Ker} u$.

Exercice 4

a) On a $E = \text{Im}(u + v) \subset \text{Im} u + \text{Im} v$ donc $\text{Im} u + \text{Im} v = E$.

D'après la formule de Grassmann, $\dim E = \dim(\text{Im} u + \text{Im} v) = \dim(\text{Im} u) + \dim(\text{Im} v) - \dim(\text{Im} u \cap \text{Im} v) = n - \dim(\text{Im} u \cap \text{Im} v)$ donc $\text{Im} u \cap \text{Im} v = \{0\}$ et ainsi $E = \text{Im} u \oplus \text{Im} v$.

b) Soit $x \in \text{Ker} u$. On a $x = u(x) + v(x)$ et $u(x) = 0$ donc $x = v(x) \in \text{Im} v$. Ainsi, $\text{Ker} u \subset \text{Im} v$. Mais d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker} u) = n - \dim(\text{Im} u) = \dim(\text{Im} v)$ donc $\text{Ker} u = \text{Im} v$. De manière symétrique, $\text{Ker} v = \text{Im} u$.

c) On a $u \circ v = 0$ donc $u = u \circ \text{Id} = u \circ (u + v) = u \circ u$, ce qui prouve que u est un projecteur. Il s'agit donc de la projection sur $\text{Im} u$, parallèlement à $\text{Ker} u = \text{Im} v$.

Exercice 5

a) Si $AB = I_n$, $\det A \times \det B = 1$, ce qui prouve que A est inversible. En multipliant à gauche par A^{-1} on obtient $B = A^{-1}$ et donc $BA = A^{-1}A = I_n$.

b) On définit A et B par blocs en posant $A = \begin{pmatrix} I_n & O \\ O & O \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} I_n \\ O \end{pmatrix}$. Alors $AB = I_n$ et $BA = \begin{pmatrix} I_n & O \\ O & O \end{pmatrix}$.

c) On a $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg} A, \text{rg} B)$ (cf exercice 1) donc $\text{rg}(AB) \leq \min(n, p) = p < n$ donc on ne peut avoir $AB = I_n$.

Exercice 6

– On suppose (i) et (ii).

Si $\text{rg} A = 1$, en choisissant une base adaptée à $\text{Ker} A$, A est semblable à une matrice $B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

On calcule $B^2 = a_1 B$ donc $a_1 = 1$ et $\text{tr} A = \text{tr} B = a_1 = 1$.

– On suppose (ii) et (iii).

A est toujours semblable à B , et $a_1 = \text{tr} B = \text{tr} A = 1$ donc $B^2 = B$, ce qui équivaut à $A^2 = A$.

– On suppose (iii) et (i).

Si $A^2 = A$ alors A est la matrice d'une projection vectorielle, donc semblable à $\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$, avec $r = \text{rg} A$. Mais dans ce cas $\text{tr} A = r$ donc $r = 1$.

Exercice 7

Commencez par observer que CL est une matrice $n \times n$, mais LC est une matrice 1×1 , autrement dit un scalaire.

a) A n'est pas inversible si et seulement s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $X \neq 0$, tel que $AX = 0$, soit $C(LX) = -X$.

Mais LX est une matrice 1×1 donc un scalaire. On a donc nécessairement $X \in \text{Vect}(C)$, et ainsi, A n'est pas inversible si et seulement si $C \neq 0$ et $C(LC) = -C$, soit $LC = -1$.

Par contraposée, A est inversible si et seulement si $LC \neq -1$.

b) On calcule $A^2 = I + 2CL + C(LC)L = I + (2 + \alpha)CL$ avec $\alpha = LC \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq -1$.

Ainsi, $A^2 - (2 + \alpha)A + (1 + \alpha)I = 0$, soit encore : $A((2 + \alpha)I - A) = (1 + \alpha)I$.

On en déduit que $A^{-1} = \frac{1}{1 + \alpha}((2 + \alpha)I - A) = I - \frac{1}{1 + \alpha}CL$.