révision

Algèbre linéaire

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on pose $\mathrm{I}_p = \mathrm{Im}(u^p)$ et $\mathrm{K}_p = \mathrm{Ker}(u^p)$.

a. Montrer que les suites (I_p) et (K_p) sont respectivement décroissante et croissante pour l'inclusion, puis qu'elles sont simultanément stationnaires.

b. On note r le rang à partir duquel les deux suites sont stationnaires (c'est l'indice de *Fitting*). Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{I}_r \oplus \mathrm{K}_r$, puis que dans une base (e) adaptée à cette décomposition, $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{N} \end{array}\right)$ où A est une matrice inversible et N une matrice nilpotente dont on précisera l'indice de nilpotence.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

a. Montrer qu'il existe un projecteur p et un automorphisme $v \in \mathcal{GL}(\mathrm{E})$ tels que $u = p \circ v$.

b. Montrer qu'il existe un projecteur q et un automorphisme $w \in \mathcal{GL}(\mathrm{E})$ tels que $u = w \circ q$.

Exercice 3

On considère la famille $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \dots, \mathrm{L}_n)$ des polynômes d'interpolation de Lagrange relative aux points $1, 2, \dots, n$.

À quoi est égal $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^k \mathrm{L}_j(0)$ lorsque $k \in [\![0, n-1]\!]$? et lorsque $k = n$?

Exercice 4

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $\phi : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{AM} + \mathrm{MA} \end{array}\right)$.

Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et calculer sa trace en fonction de celle de A.

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel de dimension 4, et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $u \neq 0$ et $u^2 = 0$.

a. Montrer que $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u$, puis que $\dim \mathrm{Ker}\, u$ est égal à 2 ou 3.

b. On suppose dans cette question que $\dim \mathrm{Ker}\, u = 3$. Justifier l'existence de $(x, y, z) \in \mathrm{E}^3$ tel que $\big(u(x), y, z\big)$ soit une base de $\mathrm{Ker}\, u$, puis montrer que $\big(u(x), y, z, x\big)$ est une base de E. À quoi est égale la matrice associée à u dans cette base ?

c. On suppose dans cette question que $\dim \mathrm{Ker}\, u = 2$. Justifier l'existence de $(x, y) \in \mathrm{E}^2$ tel que $\big(u(x), u(y)\big)$ soit une base de $\mathrm{Ker}\, u$. Montrer que $\big(u(x), u(y), x, y\big)$ est une base de E, puis écrire la matrice associée à u dans cette base.

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, f et g deux endomorphismes de E tels que $f^2 = \mathrm{Id}$, $g^2 = \mathrm{Id}$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

a. Montrer que E est de dimension paire. On pose $\dim(\mathrm{E}) = 2p$.

b. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont respectivement :

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_p & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & -\mathrm{I}_p \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O} & \mathrm{I}_p \\ \hline \mathrm{I}_p & \mathrm{O} \end{array}\right)$$