corrigé

Algèbre linéaire

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on pose $\mathrm{I}_p = \mathrm{Im}(u^p)$ et $\mathrm{K}_p = \mathrm{Ker}(u^p)$.

a. Montrer que les suites (I_p) et (K_p) sont respectivement décroissante et croissante pour l'inclusion, puis qu'elles sont simultanément stationnaires.

b. On note r le rang à partir duquel les deux suites sont stationnaires (c'est l'indice de *Fitting*). Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{I}_r \oplus \mathrm{K}_r$, puis que dans une base (e) adaptée à cette décomposition, $\mathrm{Mat}_{(e)}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{N} \end{array}\right)$ où A est une matrice inversible et N une matrice nilpotente dont on précisera l'indice de nilpotence.

a. $u^{p+1} = u^p \circ u$ donc $\mathrm{Im}(u^{p+1}) \subset \mathrm{Im}(u^p)$: la suite (I_p) est décroissante.
$u^{p+1} = u \circ u^p$ donc $\mathrm{Ker}(u^p) \subset \mathrm{Ker}(u^{p+1})$: la suite (K_p) est croissante.
La suite $(\dim \mathrm{Ker}(u^p))_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers majorée par $\dim \mathrm{E}$ donc est stationnaire. Notons r le plus petit entier pour lequel $\mathrm{K}_r = \mathrm{K}_{r+1}$. Pour tout $x \in \mathrm{K}_{r+2}$ on a $u^{r+2}(x) = 0_\mathrm{E}$ donc $u(x) \in \mathrm{K}_{r+1} = \mathrm{K}_r$, ce qui prouve que $u^r(u(x)) = u^{r+1}(x) = 0_\mathrm{E}$. Ainsi $\mathrm{K}_{r+1} = \mathrm{K}_{r+2}$, puis par récurrence : pour tout $p \geqslant r$, $\mathrm{K}_p = \mathrm{K}_r$.
On a donc montré que $\mathrm{K}_0 \subsetneq \mathrm{K}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{K}_{r-1} = \mathrm{K}_r = \mathrm{K}_{r+1} = \mathrm{K}_{r+2} = \cdots$
Le théorème du rang prouve alors que $\mathrm{I}_0 \supsetneq \mathrm{I}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathrm{I}_{r-1} = \mathrm{I}_r = \mathrm{I}_{r+1} = \mathrm{I}_{r+2} = \cdots$

b. Soit $y \in \mathrm{I}_r \cap \mathrm{K}_r$: il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = u^r(x)$ et $u^r(y) = 0_\mathrm{E}$ donc $u_{2r}(x) = 0_\mathrm{E}$. Ainsi, $x \in \mathrm{K}_{2r} = \mathrm{K}_r$ donc $y = u^r(x) = 0_\mathrm{E}$.
La somme $\mathrm{I}_r \oplus \mathrm{K}_r$ est directe, et égale à E d'après le théorème du rang.
Pour tout $x \in \mathrm{I}_r$, $u(x) \in \mathrm{I}_{r+1} = \mathrm{I}_r$ donc I_r est stable par u. A est donc la matrice de l'induit u_I de u sur I_r. Or $\mathrm{Ker}(u_\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{I}_r \subset \mathrm{K}_r \cap \mathrm{I}_r = \{0_\mathrm{E}\}$ donc u_I est injectif, et donc bijectif (la dimension est finie), ce qui prouve que A est inversible.
Pour tout $x \in \mathrm{K}_r$, $u^r(u(x)) = u^{r+1}(x) = 0_\mathrm{E}$ donc $u(x) \in \mathrm{K}_r$. N est donc la matrice de l'induit u_K de u sur K_r. Or pour tout $x \in \mathrm{K}_r$, $u_\mathrm{K}^r(x) = u^r(x) = 0_\mathrm{E}$ donc $u_\mathrm{K}^r = 0$: la matrice N est nilpotente.
Enfin, puisque $\mathrm{K}_{r-1} \subsetneq \mathrm{K}_r$, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $u^{r-1}(x) \neq 0_\mathrm{E}$ et $u^r(x) = 0_\mathrm{E}$, soit $x \in \mathrm{K}_r$ et $u_\mathrm{K}^{r-1}(x) \neq 0_\mathrm{E}$. L'indice de nilpotence de N est égal à r.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

a. Montrer qu'il existe un projecteur p et un automorphisme $v \in \mathcal{GL}(\mathrm{E})$ tels que $u = p \circ v$.

b. Montrer qu'il existe un projecteur q et un automorphisme $w \in \mathcal{GL}(\mathrm{E})$ tels que $u = w \circ q$.

a. Si un tel couple (p, v) existe on aura nécessairement $p \circ u = u$, ce qui laisse penser qu'il faut choisir pour p une projection sur $\mathrm{Im}\, u$. Notons H un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$, et K un supplémentaire de $\mathrm{Im}\, u$:

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{H} \quad \text{et} \quad \mathrm{E} = \mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{K}$$

On sait que u réalise un isomorphisme entre H et $\mathrm{Im}\, u$ et que $\dim \mathrm{K} = \dim \mathrm{E} - \dim(\mathrm{Im}\, u) = \dim(\mathrm{Ker}\, u)$ donc $\mathrm{Ker}\, u$ et K sont isomorphes. On peut donc définir un automorphisme $v : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ tel que $\forall x \in \mathrm{H}$, $v(x) = u(x)$ et $v(\mathrm{Ker}\, u) = \mathrm{K}$. En notant p la projection sur $\mathrm{Im}\, u$, parallèlement à K, on a :

$$\forall x \in \mathrm{H},\ p \circ v(x) = p(u(x)) = u(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathrm{Ker}\, u,\ p \circ v(x) = p(v(x)) = 0_\mathrm{E} = u(x)$$

donc $u = p \circ v$.

b. Si un tel couple existe, on aura $u(x) = 0_\mathrm{E} \iff q(x) = 0_\mathrm{E}$ donc q doit être une projection parallèlement à $\mathrm{Ker}\, u$. Considérons donc pour q la projection sur H, parallèlement à $\mathrm{Ker}\, u$, et pour w l'automorphisme v défini à la question précédente. Alors :

$$\forall x \in \mathrm{Ker}\, u,\ v \circ q(x) = v(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{E} = u(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathrm{H},\ v \circ q(x) = v(x) = u(x)$$

donc $u = v \circ q$.

Exercice 3

On considère la famille $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ des polynômes d'interpolation de Lagrange relative aux points $1, 2, \dots, n$.
À quoi est égal $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^k L_j(0)$ lorsque $k \in [\![0, n-1]\!]$? et lorsque $k = n$?

$(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $X^k = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^k L_j$ et donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^k L_j(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n-1 \end{cases}$

Ceci ne s'applique pas pour $k = n$ puisque $X^n \notin \mathbb{R}_{n-1}[X]$. En revanche, le polynôme $P = X^n - \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X-k)$ est élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $P = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(j) L_j = \sum_{j=1}^{n} j^n L_j$ et donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^n L_j(0) = P(0) = (-1)^{n-1} n!$.

Exercice 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $\phi : \begin{pmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & AM + MA \end{pmatrix}$.
Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et calculer sa trace en fonction de celle de A.

Dans un premier temps, on calcule $\phi(E_{ij})$. Si on pose $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl} E_{kl}$ alors

$$AE_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl} E_{kl} E_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} E_{kj} \quad \text{et} \quad E_{ij} A = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl} E_{ij} E_{kl} = \sum_{l=1}^{n} a_{jl} E_{il}.$$

donc $\phi(E_{ij}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ki} E_{kj} + \sum_{l=1}^{n} a_{jl} E_{il}$.
Maintenant, imaginons la matrice associée à ϕ dans la base canonique (E_{ij}). Il s'agit d'une matrice ayant n^2 lignes et n^2 colonnes, mais seuls les éléments diagonaux nous intéressent. En particulier, celui qui se trouve dans la colonne dévolue à E_{ij} est égal au coefficient devant E_{ij} dans l'expression de $\phi(E_{ij})$: il s'agit donc de $a_{ii} + a_{jj}$. Ainsi,

$$\operatorname{tr}(\phi) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_{ii} + a_{jj}) = \sum_{i=1}^{n} (n a_{ii} + \operatorname{tr}(A)) = n \operatorname{tr} A + n \operatorname{tr} A = 2n \operatorname{tr} A.$$

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel de dimension 4, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \neq 0$ et $u^2 = 0$.

a. Montrer que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$, puis que $\dim \operatorname{Ker} u$ est égal à 2 ou 3.

b. On suppose dans cette question que $\dim \operatorname{Ker} u = 3$. Justifier l'existence de $(x, y, z) \in E^3$ tel que $\big(u(x), y, z\big)$ soit une base de $\operatorname{Ker} u$, puis montrer que $\big(u(x), y, z, x\big)$ est une base de E. À quoi est égale la matrice associée à u dans cette base ?

c. On suppose dans cette question que $\dim \operatorname{Ker} u = 2$. Justifier l'existence de $(x, y) \in E^2$ tel que $\big(u(x), u(y)\big)$ soit une base de $\operatorname{Ker} u$. Montrer que $\big(u(x), u(y), x, y\big)$ est une base de E, puis écrire la matrice associée à u dans cette base.

a. $u \circ u = 0$ donc $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$. En particulier, $\dim \operatorname{Im} u \leqslant \dim \operatorname{Ker} u$ et d'après le théorème du rang, $4 - \dim \operatorname{Ker} u \leqslant \dim \operatorname{Ker} u$, soit $\dim \operatorname{Ker} u \geqslant 2$. Puisque $u \neq 0$ on a $\dim \operatorname{Ker} u \leqslant 3$ donc $\dim \operatorname{Ker} u \in \{2, 3\}$.

b. D'après le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Im} u) = 1$ donc il existe $x \neq 0_E$ tel que $u(x)$ soit une base de $\operatorname{Im} u$, base que l'on peut compléter pour former une base $(u(x), y, z)$ de $\operatorname{Ker} u$. Et puisque $x \notin \operatorname{Ker} u$, x engendre un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$, ce qui signifie que $(u(x), y, z, x)$ est une base de E.

Dans cette base, la matrice associée à u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c. D'après le théorème du rang on a aussi $\dim(\operatorname{Im} u) = 2$ donc $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$. Soit H un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$. H est de dimension 2 ; on note (x, y) une base de H. On sait que u réalise un isomorphisme entre H et $\operatorname{Im} u$ donc $(u(x), u(y))$ est une base de $\operatorname{Im} u$ et $(u(x), u(y), x, y)$ est donc une base de E.

Dans cette base, la matrice associée à u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, f et g deux endomorphismes de E tels que $f^2 = \mathrm{Id}$, $g^2 = \mathrm{Id}$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

a. Montrer que E est de dimension paire. On pose $\dim(\mathrm{E}) = 2p$.

b. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont respectivement :

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_p & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & -\mathrm{I}_p \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O} & \mathrm{I}_p \\ \hline \mathrm{I}_p & \mathrm{O} \end{array}\right)$$

a. Soit $n = \dim \mathrm{E}$. Puisque $f \circ g = -g \circ f$ on a $\det(f \circ g) = (-1)^n \det(g \circ f)$ soit $\det f \det g = (-1)^n \det g \det f$ et puisque $\det f \neq 0$ et $\det g \neq 0$, $(-1)^n = 1$: $\dim \mathrm{E}$ est pair.

b. Puisque $f^2 = \mathrm{Id}$, f est une symétrie et $\mathrm{E} = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$.

De plus, puisque $f \circ g + g \circ f = 0$, on a pour tout $x \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$, $g(x) \in \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et pour tout $x \in \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$, $g(x) \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$. Ainsi, $g\big(\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})\big) \subset \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et $g\big(\operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})\big) \subset \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$.

Puisque g est bijectif, $\dim g(\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})) = \dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\dim g(\operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})) = \dim \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$ donc les inclusions précédentes prouvent que $\dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et $\dim \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}) \leqslant \dim(\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$, d'où l'égalité $\dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \dim \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$.

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}))$. Puisque g est un isomorphisme entre $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$, $(g(e_1), \ldots, g(e_p))$ est une base de $\operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id})$.

On en déduit que $(e_1, \ldots, e_p, g(e_1), \ldots, g(e_p))$ est une base de E. La matrice de f dans cette base est bien $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_p & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & -\mathrm{I}_p \end{array}\right)$ et puisque $g^2 = \mathrm{Id}$, la matrice de g dans cette base est $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O} & \mathrm{I}_p \\ \hline \mathrm{I}_p & \mathrm{O} \end{array}\right)$.