Préparation aux oraux – 7

Exercice 1 [CCINP 2019]

On dispose d'une urne contenant n boules numérotées. On tire une boule, on note son numéro, puis on la remet dans l'urne. On réalise un second tirage suivant le même protocole.
On note X la variable aléatoire donnant le plus grand numéro tiré et Y celle donnant le plus petit.

a. Déterminer la loi conjointe (X, Y).

b. Déterminer les lois marginales des deux variables aléatoires.

Exercice 2 [Mines PC 2017]

Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ de limite nulle en $+\infty$. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(2t) - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 [Centrale PC 2017]

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et u et v dans $\mathcal{L}(E)$.

a. On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $au + bv$ soit dans $\mathcal{GL}(E)$. Montrer que $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0_E\}$.

b. On suppose que $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0_E\}$. Existe-t-il toujours $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $au + bv$ soit dans $\mathcal{GL}(E)$?

c. On suppose que $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0_E\}$ et que $u \circ v = v \circ u$. Existe-t-il toujours $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $au + bv$ soit dans $\mathcal{GL}(E)$?

Exercice 4 [X PC 2017]

Soit $F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $F(a) = \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)(a^2-x^2)}}$.

a. Montrer que F est bien définie.

b. Déterminer la limite de F en $+\infty$.

c. Déterminer la limite ℓ de F en 0^+, puis un équivalent de $F - \ell$.