Préparation aux oraux – 6

Exercice 1 [CCP PC 2018 – Maïwenn Le Denic]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $h_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant \sqrt{n} \\ \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } x \leqslant \sqrt{n} \end{cases}$ et $h(x) = \exp(-x^2)$.

a. Montrer que pour tout $t \in [0, 1[$, $\ln(1-t) \leqslant -t$.

b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geqslant n_0$ on ait $x \in [0, \sqrt{n}]$, et en déduire que $(h_n(x))_n$ converge vers $h(x)$.

c. Montrer que $|h_n(x)| \leqslant h(x)$.

d. On pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t$. Montrer que le changement de variable $x = \sqrt{n} \sin t$ est valide puis démontrer l'égalité suivante : $\sqrt{n}\mathrm{I}_{2n+1} = \displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(x)\,\mathrm{d}x$.

e. En déduire que la suite $(\sqrt{n}\mathrm{I}_{2n+1})$ converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$.

f. On admet que $(n+2)\mathrm{I}_{n+2} = (n+1)\mathrm{I}_n$. Montrer que $(n+1)\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{I}_n = \dfrac{\pi}{2}$.

g. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 [Centrale PC 2018 – Charles Millancourt]

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et $(f, g) \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telles que $g \geqslant 0$.

a. Montrer l'existence de $c \in [a, b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

b. Ce résultat reste-t-il vrai lorsque g n'est plus supposée positive ?

c. *Application*. Donner un équivalent $g(x)$ de $f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \arctan(t^2)\,\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers $+\infty$.

d. Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$.

Exercice 3 [Mines PC 2018 – Théo Fauvet]

Soit $g : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^t}{1 + \mathrm{e}{-t}}$.

a. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la fonction génératrice $\mathrm{G_X}$ est égale à g.

b. Soit $n \geqslant 2$ et $(\mathrm{X}_{i,j})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de X. Déterminer la probabilité que la matrice

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{X}_{1,2} & \cdots & \mathrm{X}_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathrm{X}_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

admette un nombre fini de sous-espaces stables.

Exercice 4 [X PC 2020 – Nicolas Bletsas]

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \circ f(x) = 2x + 1$.

Exercice 5 [CCP PC 2018 – Lisa Tekouk]

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle, et f_A l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f_A(M) = AM - MA$.

a. Montrer que f_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Soient X et Y deux vecteurs propres de A associés à λ et μ respectivement.
Quelle est la taille de XY^T ? Exprimer XY^T en fonction des coefficients de X et de Y.

c. Montrer que XY^T est vecteur propre de f_A, associé à une valeur propre que l'on précisera, et en déduire que f_A n'est pas bijective.

d. Justifier l'existence d'une base $(X_1, \dots, X_n)$ de vecteurs propres de A telle que pour $i \neq j$, $X_i^T X_j = 0$, et en déduire que $\dim \operatorname{Ker} f_A \geqslant n$.

e. Montrer que f_A est diagonalisable.

f. On définit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ en posant pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $B_{ij} = 1$. Déterminer les valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres de f_B.

Exercice 6 [Centrale PC 2018 – Lucas Marquier]

On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

a. Justifier l'existence de cette intégrale.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt$.
Justifier l'existence de cette intégrale, puis montrer que la suite (I_n) est constante.

c. Déduire de la valeur de I_n, celle de I.

Indication. Utiliser l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,dt$.

Exercice 7 [Mines PC 2018 – Benjamin Pinet]

Calculer $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$ à l'aide de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$.

Exercice 8 [X PC 2020 – Guillaume Gesmier]

Soit $p \leqslant n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On suppose $AB = \left(\begin{array}{c|c} I_p & C \\ \hline O & D \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $C \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

a. Montrer que $D = 0$.

b. Calculer BA.