2021

Préparation aux oraux – 5

Exercice 1 [TPE PC 2018 – Jérémie Tran]

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

a. Montrer que $\operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans E.

b. Soient A, B, et C trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $u \in \mathcal{L}(A,B)$ et $v \in \mathcal{L}(B,C)$. Montrer que $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} v$ et $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg} u$.

c. Comparer $\operatorname{rg} f$ et $\operatorname{rg} g$.

d. On suppose que $\dim E = \dim F = \operatorname{rg} f = n$. Montrer que $g \circ f = \mathrm{Id}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2 [Centrale MP 2016 – Andrea-Korel Ménégoni]

a. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x) + f(-x)$.

On considère désormais un réel $\alpha \in]-1,1[$.

b. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ développables en série entière au voisinage de 0 telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x) + f(\alpha x)$.

c. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x) + f(\alpha x)$.

Exercice 3 [Mines PC 2018 – Brieuc Nicolas]

Soit $n \geqslant 3$ et $P_n = X^n - X + 1$.

a. Déterminer le nombre de racines réelles de P_n.

b. Montrer que P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

c. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ -1 & \text{si } (i,j) = (1,n) \\ 1 & \text{si } (i,j) = (2,n) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que M est diagonalisable.

Exercice 4 [X PC 2018 – Guillaume Gesmier]

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles. On dit que X est *symétrique* lorsque X et $-X$ suivent la même loi.

a. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles symétriques. Les variables aléatoires (X_1, X_2) et $(X_1, -X_2)$ suivent-elles nécessairement la même loi ?

b. Soit $n \geqslant 2$ un entier, et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, symétriques, à valeurs réelles. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on note $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$.
Si $k \in [\![1,n-1]\!]$, montrer que $(S_1, \dots, S_k, S_n)$ et $(S_1, \dots, S_k, 2S_k - S_n)$ suivent la même loi.

Exercice 5 [CCP PC 2018 – Timothé Aït Isha-Serafim]

Soit $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right)$. Prouver la convergence puis calculer la somme de la série $\sum_{n \geqslant 0} u_n$.

Exercice 6 [Centrale PC 2016 – Louis Chartrain]

Soit E un espace euclidien et $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on définit $f_\alpha : x \mapsto x + \alpha \langle x \mid a \rangle a$.

a. Montrer que f_α est un endomorphisme. Calculer $f_\alpha \circ f_\beta$ pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Pour quels α l'application f_α est-elle un automorphisme ?

b. Déterminer les éléments propres de f_α.

Exercice 7 [Mines PC 2018 – Sarah Bakouri]

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 t\,\mathrm{e}^{-xt\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

a. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

b. f est-elle de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_f$?

c. Est-elle développable en série entière ?

Exercice 8 [X PC 2020 – Arno Sébouaï]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-nt - t^2/2)\,\mathrm{d}t$.

Justifier la définition de u_n, puis donner un développement asymptotique à la précision $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ de u_n.