corrigé

Préparation aux oraux – 5

Exercice 1 [TPE PC 2018]

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,E)$ tels que $f\circ g\circ f = f$ et $g\circ f\circ g = g$.

a. Montrer que $\operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires dans E.

b. Soient A, B, et C trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $u \in \mathcal{L}(A,B)$ et $v \in \mathcal{L}(B,C)$. Montrer que $\operatorname{rg}(v\circ u) \leqslant \operatorname{rg} v$ et $\operatorname{rg}(v\circ u) \leqslant \operatorname{rg} u$.

c. Comparer $\operatorname{rg} f$ et $\operatorname{rg} g$.

d. On suppose que $\dim E = \dim F = \operatorname{rg} f = n$. Montrer que $g\circ f = \mathrm{Id}$. Que peut-on en déduire ?

a. Soit $x \in \operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f$. Il existe $y \in F$ tel que $x = g(y)$, et $f(x) = 0_F$ donc $f\circ g(y) = 0_F$. De la deuxième égalité on déduit $g(y) = 0_E$, soit $x = 0_E$. La somme $\operatorname{Im} g \oplus \operatorname{Ker} f$ est directe.
Soit $x \in E$. On cherche x_1 dans E et y dans F tels que $x = x_1 + x_2$ avec $f(x_1) = 0_F$ et $x_2 = g(y)$.
S'ils existent alors $f(x) = f\circ g(y)$ donc $g\circ f(x) = g(y) = x_2$.
Posons donc $x_2 = g\circ f(x)$ et $x_1 = x - x_2$. On a bien $x_2 \in \operatorname{Im} g$ donc il reste à prouver que $x_1 \in \operatorname{Ker} f$. On calcule à cet effet $f(x_1) = f(x) - f\circ g\circ f(x) = 0_F$.
On a bien prouvé que $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g$, donc en conclusion, $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$.

b. $\operatorname{Im}(v\circ u) \subset \operatorname{Im} v$ donc $\operatorname{rg}(v\circ u) \leqslant \operatorname{rg} v$.
$\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker}(v\circ u)$ donc $\dim A - \operatorname{rg} u \leqslant \dim A - \operatorname{rg}(v\circ u)$, soit $\operatorname{rg}(v\circ u) \leqslant \operatorname{rg} u$.

c. On a $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(f\circ g\circ f) \leqslant \operatorname{rg}(f\circ g) \leqslant \operatorname{rg} g$ et $\operatorname{rg} g = \operatorname{rg}(g\circ f\circ g) \leqslant \operatorname{rg}(g\circ f) \leqslant \operatorname{rg} f$ donc $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$.

d. Dans ce cas f est bijective et en composant à gauche et à droite par f^{-1} dans l'égalité $f\circ g\circ f = f$ on obtient $g = f^{-1}$.

Exercice 2 [Centrale MP 2016]

a. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x) + f(-x)$.

On considère désormais un réel $\alpha \in]-1,1[$.

b. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ développables en série entière au voisinage de 0 telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x) + f(\alpha x)$.

c. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables et telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x) + f(\alpha x)$.

a. f' est de classe $\mathscr{C}^1$ donc f est de classe $\mathscr{C}^2$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = f'(x) - f'(-x) = f(x) + f(-x) - (f(-x) + f(x)) = 0$ donc il existe a et b dans $\mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.
En reportant dans l'équation $f'(x) = f(x) + f(-x)$ on obtient la condition $a = 2b$ donc $f(x) = b(2x+1)$ avec $b \in \mathbb{R}$. La réciproque est immédiate.

b. Soit f une solution. Au voisinage de 0 on peut écrire $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et en reportant dans l'équation on obtient la condition $a_{n+1} = \dfrac{1+\alpha^n}{n+1} a_n$ donc $a_n = \dfrac{a_0}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (1+\alpha^k)$.
Considérons la fonction $\phi : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \dfrac{x^n}{n!}$ avec $a_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1+\alpha^k)$. D'après le critère de d'Alembert, cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, et on prouve sans peine qu'elle est solution de l'équation.

c. Par une récurrence immédiate f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et il existe des coefficients $c_{n,k}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} f(\alpha^k x)$.

On a $c_{n,0} = 1$ et $c_{n+1,k} = c_{n,k}\alpha^k + c_{n,k-1}\alpha^{k-1}$ donc $\sum_{k=0}^{n+1} c_{n+1,k} \leqslant 2\sum_{k=0}^{n} c_{n,k}$ d'où $\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} \leqslant 2^n$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in [0,x]$, $|f^{(n)}(t)| \leqslant 2^n M$ avec $M = \sup_{[0,x]} |f(t)|$.

Alors $\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{M}\int_0^{|x|}\frac{(|x|-t)^n}{n!}2^{n+1}\,\mathrm{d}t = \mathrm{M}\frac{2^{n+1}|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \mathrm{o}(1)$ donc $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ et d'après la question précédente, $f = f(0)\phi$.

Exercice 3 [Mines PC 2018]

Soit $n \geqslant 3$ et $\mathrm{P}_n = \mathrm{X}^n - \mathrm{X} + 1$.

a. Déterminer le nombre de racines réelles de P_n.

b. Montrer que P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

c. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $\mathrm{M}_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ -1 & \text{si } (i,j) = (1,n) \\ 1 & \text{si } (i,j) = (2,n) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que M est diagonalisable.

a. $\mathrm{P}_n' = n\mathrm{X}^{n-1} - 1$. Si n est pair, P_n est décroissant sur $]-\infty, x_n]$ et croissant sur $[x_n, +\infty[$ donc minimal en $x_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.
Or $\mathrm{P}_n(x_n) = \left(\frac{1}{n}-1\right)x_n + 1 > 1 - x_n > 0$ donc P_n n'a pas de racine réelle.
Si n est impair, P_n est croissant sur $]-\infty, x_n]$, décroissant sur $[-x_n, x_n]$ et croissant sur $[x_n, \infty[$, et puisque $\mathrm{P}_n(x_n) > 0$, P_n n'a qu'une racine réelle, située dans l'intervalle $]-\infty, -x_n]$.

b. D'après le théorème de d'Alembert P_n est scindé sur $\mathbb{C}$. S'il admet une racine double z alors

$$\begin{cases} \mathrm{P}_n(z) = 0 \\ \mathrm{P}_n'(z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z^n - z + 1 = 0 \\ nz^{n-1} - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z - nz + n = 0 \\ nz^{n-1} - 1 = 0 \end{cases} \iff z = \frac{n}{n-1} \text{ et } \mathrm{P}_n'(z_n) = 0$$

ce qui est impossible puisque $\frac{n}{n-1} > 1 > x_n$. Le polynôme P_n est bien à racines simples.

c. Deux développements successifs par rapport à la première ligne conduisent à $\chi_\mathrm{M} = \mathrm{P}_n$ donc M est diagonalisable.

Exercice 4 [X PC 2018]

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles. On dit que X est *symétrique* lorsque X et $-\mathrm{X}$ suivent la même loi.

a. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles symétriques. Les variables aléatoires $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$ et $(\mathrm{X}_1, -\mathrm{X}_2)$ suivent-elles nécessairement la même loi ?

b. Soit $n \geqslant 2$ un entier, et $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$ des variables aléatoires indépendantes, symétriques, à valeurs réelles. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on note $\mathrm{S}_k = \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \cdots + \mathrm{X}_k$.
Si $k \in [\![1, n-1]\!]$, montrer que $(\mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_k, \mathrm{S}_n)$ et $(\mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_k, 2\mathrm{S}_k - \mathrm{S}_n)$ suivent la même loi.

a. Si X_1 et X_2 sont indépendantes, on a $\mathbb{P}((\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) = (a,b)) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = a)\mathbb{P}(\mathrm{X}_2 = b) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = a)\mathbb{P}(\mathrm{X}_2 = -b) = \mathbb{P}((\mathrm{X}_1, -\mathrm{X}_2) = (a,b))$ donc $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$ et $(\mathrm{X}_1, -\mathrm{X}_2)$ suivent la même loi.
En revanche ce résultat peut être mis en défaut lorsque X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes. Par exemple, si $a \neq 0$, $\mathbb{P}((\mathrm{X}, \mathrm{X}) = (a,a)) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = a)$ peut être non nul bien que dans tous les cas $\mathbb{P}((\mathrm{X}, -\mathrm{X}) = (a,a)) = \mathbb{P}(\mathrm{X} = a \text{ et } \mathrm{X} = -a) = 0$.

b. Traitons déjà du cas où $k = n-1$. On a $2\mathrm{S}_{n-1} - \mathrm{S}_n = \mathrm{S}_{n-1} - \mathrm{X}_n$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big((\mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_{n-1}, \mathrm{S}_n) = (a_1, \ldots, a_n)\Big) &= \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = a_1, \mathrm{X}_2 = a_2 - a_1, \ldots, \mathrm{X}_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2}, \mathrm{X}_n = a_n - a_{n-1}) \\ &= \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = a_1)\mathbb{P}(\mathrm{X}_2 = a_2 - a_1)\cdots\mathbb{P}(\mathrm{X}_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2})\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = a_n - a_{n-1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big((\mathrm{S}_1, \ldots, \mathrm{S}_{n-1}, 2\mathrm{S}_{n-1} - \mathrm{S}_n) = (a_1, \ldots, a_n)\Big) &= \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = a_1, \mathrm{X}_2 = a_2 - a_1, \ldots, \mathrm{X}_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2}, a_{n-1} - \mathrm{X}_n = a_n) \\ &= \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 = a_1)\mathbb{P}(\mathrm{X}_2 = a_2 - a_1)\cdots\mathbb{P}(\mathrm{X}_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2})\mathbb{P}(\mathrm{X}_n = a_{n-1} - a_n)\end{aligned}$$

La variable X_n étant symétrique, le résultat est acquis pour $k = n-1$.

Dans le cas général, on a $2S_k - S_n = S_k - Y$ avec $Y = \sum_{i=k+1}^{n} X_i$ et comme au cas précédent on obtient :

$$\mathbb{P}\Big((S_1,\dots,S_k,S_n) = (a_1,\dots,a_k,a_n)\Big) = \mathbb{P}(X_1 = a_1)\mathbb{P}(X_2 = a_2 - a_1)\cdots\mathbb{P}(X_k = a_k - a_{k-1})\mathbb{P}(Y = a_n - a_k)$$
$$\mathbb{P}\Big((S_1,\dots,S_k,2S_k - S_n) = (a_1,\dots,a_k,a_n)\Big) = \mathbb{P}(X_1 = a_1)\mathbb{P}(X_2 = a_2 - a_1)\cdots\mathbb{P}(X_k = a_k - a_{k-1})\mathbb{P}(Y = a_k - a_n)$$

Tout revient donc à montrer qu'une somme de variables aléatoires symétriques et indépendantes est toujours symétrique. Il suffit de le montrer pour deux variables ; une récurrence très simple permet ensuite de conclure.
$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = a) = \sum_{x\in X_1(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = x \text{ et } X_2 = a - x) = \sum_{x\in X_1(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = x)\mathbb{P}(X_2 = a - x) = \sum_{x\in X_1(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = -x)\mathbb{P}(X_2 = x - a) = \sum_{x\in X_1(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = -x \text{ et } X_2 = x - a) = \sum_{y\in X_1(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = y \text{ et } X_2 = -y - a) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 = -a)$
car X_1 étant symétrique, $-X_1(\Omega) = X_1(\Omega)$.

Exercice 5 [CCP PC 2018]

Soit $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On pose $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right)$. Prouver la convergence puis calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

On a $u_n \sim \cos\left(\frac{a}{2^n}\right) - 1 \sim -\frac{a^2}{2^{2n+1}}$. La série $\sum \frac{1}{4^n}$ converge donc $\sum u_n$ aussi. On calcule :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \ln(\cos a) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{\sin(a/2^{n-1})}{2\sin(a/2^n)}\right) = \ln(\cos a) - n\ln 2 + \sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left(\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)\right) - \ln\left(\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)\right)$$
$$= \ln(\cos a) + \ln(\sin a) - \ln\left(2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)\right)$$

et par passage à la limite : $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \ln(\cos a) + \ln(\sin a) - \ln a = \ln\left(\frac{\sin(2a)}{2a}\right)$.

Exercice 6 [Centrale PC 2016]

Soit E un espace euclidien et $a \in E$ tel que $\|a\| = 1$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on définit $f_\alpha : x \mapsto x + \alpha\langle x \mid a\rangle a$.

a. Montrer que f_α est un endomorphisme. Calculer $f_\alpha \circ f_\beta$ pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Pour quels α l'application f_α est-elle un automorphisme ?

b. Déterminer les éléments propres de f_α.

a. f_α est à valeurs dans E et vérifie : $\forall (x,y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, f_\alpha(\lambda x + y) = \lambda f_\alpha(x) + f_\alpha(y)$ donc $f_\alpha \in \mathcal{L}(E)$.
On calcule $f_\alpha \circ f_\beta(x) = x + (\alpha + \alpha\beta + \beta)\langle x \mid a\rangle a = f_{\alpha+\alpha\beta+\beta}(x)$.
Si $\alpha + 1 \neq 0$ on en déduit en posant $\beta = \frac{-\alpha}{\alpha+1}$ que $f_\alpha \circ f_\beta = \mathrm{Id}$ donc f_α est inversible, d'inverse $f_{-\alpha/(\alpha+1)}$.
Si $\alpha = -1$ on observe que $f_{-1}(a) = 0_E$ donc f_{-1} ne peut être inversible.
f est donc un automorphisme si et seulement si $\alpha \neq -1$.

b. On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0_E$ tels que $f_\alpha(x) = \lambda x \iff (\lambda - 1)x = \alpha\langle x \mid a\rangle a$.
Si $\lambda = 1$ on cherche $x \neq 0_E$ tel que $\alpha\langle x \mid a\rangle = 0_E$. Deux cas sont possibles :

- si $\alpha = 0$ alors $f_0 = \mathrm{Id}$ et $E_1 = E$;
- si $\alpha \neq 0$ alors $E_1 = \{a\}^\perp$.

Si $\lambda \neq 1$ nécessairement $x \in \mathrm{Vect}(a)$. Mais $f_\alpha(a) = (1+\alpha)a$ donc $\lambda = 1 + \alpha$ et pour $\alpha \neq 0$, $E_{1+\alpha} = \mathrm{Vect}(a)$.
En conclusion, si $\alpha = 0$, $f_0 = \mathrm{Id}$ et $\mathrm{Sp}(f_0) = \{1\}$, $E_1 = E$; si $\alpha \neq 0$, $\mathrm{Sp}(f_\alpha) = \{1, 1+\alpha\}$ et $E_1 = \{a\}^\perp$, $E_{1+\alpha} = \mathrm{Vect}(a)$.

Exercice 7 [Mines PC 2018]

Soit $f : x \mapsto \int_0^1 t\,\mathrm{e}^{-xt\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

a. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.

b. f est-elle de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_f$?

c. Est-elle développable en série entière ?

a. Notons $h : t \mapsto t\ln(t)$. Cette fonction est prolongeable par continuité en 0 en posant $h(0) = 0$ donc l'intégrale est faussement impropre, et f est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Posons $g(x,t) = t\,\mathrm{e}^{-xh(t)}$ et appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre :

– $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur $]0,1[$;

– $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $\dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t) = t(-h(t))^n\,\mathrm{e}^{-xh(t)}$;

– pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto \dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)$ est continue par morceaux, et pour tout $x \geqslant b$, $\left|\dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}(x,t)\right| \leqslant t|h(t)|^n\,\mathrm{e}^{-bh(t)} = \phi_n(t)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction ϕ_n est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1]$ (l'intégrale est faussement impropre) donc le théorème s'applique : f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\infty,b]$, puis sur $\mathbb{R}$ par recouvrement.

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{n+1}(\ln t)^n}{n!}x^n\,\mathrm{d}t$. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et posons $u_n(t) = \dfrac{(-1)^n t^{n+1}(\ln t)^n}{n!}$ et $u_n(0) = 0$

Les fonctions h_n sont continue sur $[0,1]$ et $\|u_n\|_\infty \leqslant \dfrac{\|h\|_\infty^n |x|^n}{n!}$, ce qui prouve la convergence normale, donc uniforme, de $\sum u_n$ sur $[0,1]$.

On peut donc intervertir somme et intégrale : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}\mathrm{I}_n$ avec $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 t^{n+1}(\ln t)^n\,\mathrm{d}t$.

Posons $\mathrm{I}_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(\ln t)^q\,\mathrm{d}t$. Une intégration par parties donne $\mathrm{I}_{p,q} = -\dfrac{q}{p+1}\mathrm{I}_{p,q-1}$ donc $\mathrm{I}_{p,q} = \dfrac{(-1)^q q!}{(p+1)^q}\mathrm{I}_{p,0} = \dfrac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}$

donc $\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_{n+1,n} = \dfrac{(-1)^n n!}{(n+2)^{n+1}}$ et ainsi $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+2)^{n+1}}$.

Exercice 8 [X PC 2020]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-nt - t^2/2)\,\mathrm{d}t$.

Justifier la définition de u_n, puis donner un développement asymptotique à la précision $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ de u_n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp(-nt - t^2/2) = \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-t^2/2}) = \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-t})$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, donc l'intégrale définissant u_n aussi.

Le changement de variable $s = nt$ conduit à $nu_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-s - s^2/(2n^2))\,\mathrm{d}s$ et le théorème de convergence dominée (fonction dominante $\phi(s) = \mathrm{e}^{-s}$) prouve que $\lim nu_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = 1$, soit $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

On écrit $nu_n - 1 = \displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-s}\left(\mathrm{e}^{-s^2/(2n^2)} - 1\right)\mathrm{d}s$.

Sachant que $\mathrm{e}^{-s^2/(2n^2)} - 1 \sim -\dfrac{s^2}{2n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$, on écrit $2n^2(nu_n - 1) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-s}\,2n^2\left(\mathrm{e}^{-s^2/(2n^2)} - 1\right)\mathrm{d}s$ et on applique le théorème de convergence dominée.

Soit $f_n(s) = \mathrm{e}^{-s}\,2n^2\left(\mathrm{e}^{-s^2/(2n^2)} - 1\right)$. (f_n) converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers $f(s) = -s^2\,\mathrm{e}^{-s}$ et $|f_n(s)| \leqslant s^2\,\mathrm{e}^{-s} = \phi(s)$ (hypothèse de domination, en utilisant $1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$) donc $\lim 2n^2(nu_n - 1) = -\int_0^{+\infty} s^2\,\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = -2$, ce qui montre que $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.