2021

Préparation aux oraux – 4

Exercice 1 [IMT PC 2018 Bettina Gouyet()]

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On pose $\mathcal{F} = \left\{g \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \,\middle|\, \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g \text{ et } \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f\right\}$.
Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, et en donner sa dimension.

Exercice 2 [Centrale PC 2018 – Solène Damaschini]

a. Montrer la convergence des séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^k}{2^n}$ pour $k \in \{0,1,2,3\}$, et en calculer les sommes.

b. Montrer que l'on définit une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ en posant $\mathbb{P}(\mathrm{X}=n) = \dfrac{n}{2^{n+1}}$, puis calculer $\mathbb{E}(\mathrm{X})$ et $\mathbb{V}(\mathrm{X})$.

c. Une urne contient X boules numérotées de 1 à X. On tire une boule au hasard et on note Y son numéro. Déterminer la loi de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\operatorname{cov}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$.

Exercice 3 [Mines PC 2018 – Nicolas Bletsas]

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On convient que $\mathrm{B}_0 = \mathrm{B}_1 = 1$.

a. Montrer que $\mathrm{B}_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{B}_k$.

b. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum \frac{\mathrm{B}_n}{n!} x^n$ est strictement positif.

c. On pose $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{B}_n}{n!} x^n$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f sur $]-\mathrm{R},\mathrm{R}[$.

d. En déduire une expression de B_n sous la forme d'une série.

Exercice 4 [X PC 2018 – Yanice Aloui]

Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

a. Étudier (u_n) pour $f : t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1+t}}$.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur f pour que la suite (u_n) converge, et déterminer alors sa limite.

Exercice 5 [CCP PSI 2018 – Milla Ragobert]

On pose $\mathrm{I}_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. On admet que $\mathrm{I}_0 = 1$.

a. Pour n pair et n impair, calculer I_n.

b. Pour P et Q dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on pose $\phi(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

ϕ est-il un produit scalaire ? Calculer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$.

Exercice 6 [Centrale PC 2018 – Élise Neyens]

On considère un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ de degré supérieur ou égal à 2. Le but de cet exercice est de montrer que P possède au moins une racine complexe (théorème de d'Alembert) ; pour cela on raisonne par l'absurde en supposant que P ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, et on définit $\mathrm{F} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ en posant $\mathrm{F}(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{r^n \mathrm{e}^{in\theta}}{\mathrm{P}(r\,\mathrm{e}^{i\theta})}\,\mathrm{d}\theta$.

a. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

b. Montrer que F est constante.

c. Conclure en observant le comportement de F en 0 et en $+\infty$.

Exercice 7 [Mines PC 2018 – Théa Chaduteau]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\displaystyle\min_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{i,j} (a_{ij} - m_{ij})^2$.

Exercice 8 [X PC 2020 – Théo Fauvet]

Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$, et $p \in]0, 1[$. On considère k joueurs. Chacun d'eux lance au plus n fois une pièce donnant pile avec la probabilité p, et s'arrête lorsqu'il obtient pile. Le nombre de points obtenu par ce joueur est égal au nombre de face obtenu (il marque donc n points s'il n'obtient jamais pile).

a. Déterminer la loi du nombre de points obtenus par un joueur donné.

b. Le gagnant est celui qui a obtenu le moins de points. déterminer la probabilité qu'il n'y ait qu'un seul gagnant.