corrigé

Préparation aux oraux – 4

Exercice 1 [IMT PC 2018]

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $\mathcal{F} = \left\{ g \in \mathcal{L}(E) \;\middle|\; \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g \text{ et } \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f \right\}$.
Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, et en donner sa dimension.

On a $g \in \mathcal{F} \iff g \circ f = 0$ et $f \circ g = 0$. Les applications $\phi : g \mapsto f \circ g$ et $\psi : g \mapsto g \circ f$ sont linéaires donc $\mathcal{F} = \operatorname{Ker} \phi \cap \operatorname{Ker} \psi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
Soit (b) une base de E telle que $(b_{r+1}, \dots, b_n)$ soit une base de $\operatorname{Ker} f$ (de sorte que $r = \operatorname{rg} f$).
On pose $b'_i = f(b_i)$ pour $i \in [\![1, r]\!]$; on sait que $(b'_1, \dots, b'_r)$ est une base de $\operatorname{Im} f$, que l'on complète pour former une base (b') de E.

Alors $A = \operatorname{Mat}_{(b,b')}(f) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$. On pose $B = \operatorname{Mat}_{(b',b)}(g) = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$.

Alors $g \in \mathcal{A} \iff AB = 0$ et $BA = 0 \iff B_1 = B_2$ et $B_1 = B_3 = 0$ soit $B = \operatorname{Mat}_{(b',b)}(g) = \begin{pmatrix} O & O \\ O & B_4 \end{pmatrix}$.

On a donc $\dim \mathcal{A} = (n - r)^2$.

Exercice 2 [Centrale PC 2018]

a. Montrer la convergence des séries $\sum\limits_{n \geqslant 0} \dfrac{n^k}{2^n}$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, et en calculer les sommes.

b. Montrer que l'on définit une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ en posant $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{n}{2^{n+1}}$, puis calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

c. Une urne contient X boules numérotées de 1 à X. On tire une boule au hasard et on note Y son numéro. Déterminer la loi de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer $\operatorname{cov}(X, Y)$.

a. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n^k}{2^n} \underset{n \to +\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{\alpha^n}\right)$ avec $1 < \alpha < 2$, donc la série $\sum \dfrac{n^k}{2^n}$ converge. On note $S(k)$ sa somme.

Posons pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$. On a $S(0) = f(1/2) = 2$.

$f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ donc $S(1) = \dfrac{1}{2} f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$.

$f''(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2} = \dfrac{2}{(1-x)^3}$ donc $\dfrac{1}{4} f''\left(\dfrac{1}{2}\right) = S(2) - S(1)$, et $S(2) = 6$.

$f^{(3)}(x) = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2) x^{n-3} = \dfrac{6}{(1-x)^4}$ donc $\dfrac{1}{8} f^{(3)}\left(\dfrac{1}{2}\right) = S(3) - 3S(2) + 2S(1)$, et $S(3) = 26$.

b. Posons $p_n = \dfrac{n}{2^{n+1}}$; on a $p_n \geqslant 0$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = \dfrac{1}{2} S(1) = 1$ donc la variable aléatoire X est bien définie.

Puisque la série $\sum n^2 p_n$ converge, X possède une espérance et une variance, et

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2} S(2) = 3 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{2} S(3) - 9 = 4.$$

c. Y est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et la variable aléatoire $(Y \mid X = n)$ suit une loi uniforme de paramètre n donc

$$\forall k \geqslant 1, \qquad \mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^k}.$$

Les deux variables ne sont pas indépendantes, puisque $\mathbb{P}(Y = k \mid X = n) \neq \mathbb{P}(Y = k)$.

On va calculer la covariance à l'aide de la formule $\operatorname{cov}(X, Y) = \dfrac{1}{2}\Big(\mathbb{V}(X + Y) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y)\Big)$.

Y suit une loi géométrique de paramètre $1/2$, donc $\mathbb{E}(Y) = 2$ et $\mathbb{V}(Y) = 2$.

Pour tout $n \geqslant 2$, $\displaystyle \mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(X = k \text{ et } Y = n - k) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(Y = n - k \mid X = k)\mathbb{P}(X = k)$

$$= \sum_{1 \leqslant n-k \leqslant k} \frac{1}{k}\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{\lceil n/2 \rceil}} - \frac{1}{2^n}.$$

On en déduit

$$\mathbb{E}\Big((X + Y)^2\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^{\lceil n/2 \rceil}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k)^2}{2^k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k-1)^2}{2^k} - S(2) = 7S(2) - 4S(1) + S(0) = 36.$$

Ainsi, $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{E}\Big((X + Y)^2\Big) - \Big(\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)\Big)^2 = 11$, et enfin $\operatorname{cov}(X, Y) = \dfrac{5}{2}$.

Exercice 3 [Mines PC 2018]

Pour $n \in \mathbb{N}$ on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On convient que $B_0 = B_1 = 1$.

a. Montrer que $\displaystyle B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

b. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle \sum \frac{B_n}{n!} x^n$ est strictement positif.

c. On pose $\displaystyle f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f sur $]-R, R[$.

d. En déduire une expression de B_n sous la forme d'une série.

a. Considérons un ensemble E à $n + 1$ éléments, et l'un de ses éléments a. Le nombre de partitions de E pour lesquelles la classe de a contient $k + 1$ éléments (avec $k \in [\![1, n]\!]$ est égal à $\displaystyle \binom{n}{k} B_{n-k}$ donc $\displaystyle B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$ de par la formule des compléments.

b. On montre par récurrence que $B_n \leqslant n!$.

- C'est clair pour $n \in \{0, 1\}$.
- Si $n \geqslant 1$, on suppose le résultat acquis jusqu'au rang n. Alors $\displaystyle B_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{n} ! = (n+1)!$ donc la récurrence se propage.

Ainsi, $\dfrac{B_n}{n!} \leqslant 1$, ce qui implique $R \geqslant 1$.

c. Pour tout $x \in]-R, R[$, $\displaystyle f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!(n-k)!} x^n$.

On reconnait un produit de Cauchy : $\displaystyle f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n\right) = e^x f(x)$.

d. On en déduit l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda e^{e^x}$. Et puisque $f(0) = 1$, $\lambda = 1/e$ et ainsi, $f(x) = e^{e^x - 1}$.

D'où : $\displaystyle f(x) = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{k!} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(kx)^n}{n!k!}$ et si on admet qu'on peut intervertir les deux sommes : $\displaystyle f(x) = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}\right) \frac{x^n}{n!}$.

Par unicité du développement en série entière on en déduit $\displaystyle B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$.

Exercice 4 [X PC 2018]

Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

a. Étudier (u_n) pour $f : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1+t}}$.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur f pour que la suite (u_n) converge, et déterminer alors sa limite.

a. On a ici $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k/n^2}{\sqrt{1+k/n^2}}$. Posons $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$. On a $|v_n - u_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\left|\frac{1}{\sqrt{1+k/n^2}} - 1\right|$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange permet d'obtenir la majoration : $|u_n - v_n| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^4} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2n}$.

Or $v_n = \frac{n+1}{2n}$ donc $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

b. Supposons $f(0) = 0$. f est dérivable en 0 donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $0 < x \leqslant \eta \implies \left|\frac{f(x)}{x} - f'(0)\right| \leqslant \epsilon$, soit $|f(x) - f'(0)x| \leqslant \epsilon x$.

Posons $v_n = f'(0)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$. Pour $n \geqslant \frac{1}{\eta}$ on a pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\frac{k}{n^2} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \eta$ donc $|u_n - v_n| \leqslant \epsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} \leqslant \epsilon$.

Nous avons prouvé que $\lim(u_n - v_n) = 0$ donc $\lim u_n = \frac{f'(0)}{2}$.

Supposons $f(0) \neq 0$. Quitte à remplacer f par $-f$ on suppose $f(0) > 0$. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que $0 \leqslant x \leqslant \eta \implies f(x) \geqslant \frac{f(0)}{2}$. Alors pour $n \geqslant \frac{1}{\eta}$ on a $u_n \geqslant n\frac{f(0)}{2}$ donc $\lim u_n = +\infty$.

Exercice 5 [CCP PSI 2018]

On pose $\mathrm{I}_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. On admet que $\mathrm{I}_0 = 1$.

a. Pour n pair et n impair, calculer I_n.

b. Pour P et Q dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on pose $\phi(\mathrm{P},\mathrm{Q}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

ϕ est-il un produit scalaire ? Calculer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$.

a. La convergence de I_n est assurée par le fait que $t^n\,\mathrm{e}^{-t^2} \underset{\pm\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-|t|})$.

Lorsque n est impair, I_n est l'intégrale d'une fonction impaire, donc $\mathrm{I}_n = 0$.

Lorsque $n = 2p$ est pair, on réalise une intégration par parties :

$$\sqrt{\pi}\mathrm{I}_{2p+2} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p+1}(t\,\mathrm{e}^{-t^2})\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}t^{2p+1}\,\mathrm{e}^{-t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2p+1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2p+1}{2}\sqrt{\pi}\mathrm{I}_{2p}$$

donc $\mathrm{I}_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots(3)(1)}{2^p}\mathrm{I}_0 = \frac{(2p)!}{4^p\,p!}$.

b. La convergence de $\phi(\mathrm{P},\mathrm{Q})$ est assurée par le fait que $\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\,\mathrm{e}^{-t^2/2} \underset{\pm\infty}{=} \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-|t|})$.

L'application ϕ est à l'évidence bilinéaire (résulte de la linéarité de l'intégrale), symétrique, positive (positivité de l'intégrale). Enfin, si $\phi(\mathrm{P},\mathrm{P}) = 0$, la fonction $t \mapsto \mathrm{P}(t)^2\,\mathrm{e}^{-t^2}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}(t)^2\,\mathrm{e}^{-t^2} = 0$, soit $\mathrm{P} = 0$. Il s'agit bien d'un produit scalaire.

Notons p la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$, et $a\mathrm{X} + b = p(\mathrm{X}^2)$. On traduit le fait que $\mathrm{X}^2 - a\mathrm{X} - b$ est orthogonal à $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$:

$$\begin{cases}\phi(\mathrm{X}^2 - a\mathrm{X} - b, 1) = 0\\ \phi(\mathrm{X}^2 - a\mathrm{X} - b, \mathrm{X}) = 0\end{cases} \iff \begin{cases}\mathrm{I}_2 = a\mathrm{I}_1 + b\mathrm{I}_0\\ \mathrm{I}_3 = a\mathrm{I}_2 + b\mathrm{I}_1\end{cases} \iff a = 0 \text{ et } b = \frac{1}{2}.$$

On a donc $d(X^2,\mathbb{R}_1[X])^2 = \|X^2 - aX - b\|^2 = \|X^2 - 1/2\|^2 = I_4 - I_2 + \frac{1}{4}I_0 = \frac{1}{2}$, soit $d(X^2,\mathbb{R}_1[X]) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 6 [Centrale PC 2018]

On considère un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2. Le but de cet exercice est de montrer que P possède au moins une racine complexe (théorème de d'Alembert); pour cela on raisonne par l'absurde en supposant que P ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, et on définit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ en posant $F(r) = \int_0^{2\pi} \frac{r^n e^{in\theta}}{P(r e^{i\theta})} d\theta$.

a. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

b. Montrer que F est constante.

c. Conclure en observant le comportement de F en 0 et en $+\infty$.

a. Posons $f(r,\theta) = \frac{r^n e^{in\theta}}{P(r e^{i\theta})}$. Pour tout $r \geqslant 0$, la fonction $\theta \mapsto f(r,\theta)$ est continue par morceaux. Pour tout $\theta \in [0,2\pi]$, la fonction $r \mapsto f(r,\theta)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) = \frac{nr^{n-1}P(r e^{i\theta}) - r^n e^{i\theta} P'(r e^{i\theta})}{P(r e^{i\theta})^2} e^{in\theta}$.

La fonction $\theta \mapsto \frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)$ est continue par morceaux, et $\left|\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)\right| \leqslant \frac{nr^{n-1}}{|P(r e^{i\theta})|} + \frac{r^n|P'(r e^{i\theta})|}{|P(r e^{i\theta})|^2}$.

Considérons maintenant $R > 0$, et le disque D du plan complexe de centre 0 et de rayon R. D est fermé borné donc les fonctions $z \mapsto |P(z)|$ et $z \mapsto |P'(z)|$ sont bornées sur D. Posons $m = \inf_{z\in D}|P(z)|$ et $M = \sup_{z\in D}|P'(z)|$. Ces bornes étant atteintes sur D, on a $m > 0$. Alors pour tout $r \in [0,R]$, $\left|\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)\right| \leqslant \frac{nR^{n-1}}{m} + \frac{MR^n}{m^2} = \phi(\theta)$. La fonction constante ϕ est intégrable sur $[0,2\pi]$ donc le théorème de dérivation des intégrales à paramètre s'applique : F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,R]$, puis sur $\mathbb{R}_+$ par recouvrement.

b. De plus, $F'(r) = r^{n-1}\int_0^{2\pi} \frac{nP(r e^{i\theta}) - r e^{i\theta} P'(r e^{i\theta})}{P(r e^{i\theta})^2} e^{in\theta} d\theta = -ir^{n-1}\left[\frac{e^{in\theta}}{P(r e^{i\theta})}\right]_0^{2\pi} = 0$ par 2π-périodicité. La fonction F est donc constante.

c. On a $F(0) = 0$ donc pour tout $r \geqslant 0$, $F(r) = 0$. Pourtant, si on note a_n le coefficient dominant de P, le théorème de convergence dominée permet de prouver que $\lim_{r\to+\infty} F(r) = \frac{2\pi}{a_n}$, ce qui donne la contradiction recherchée.

Pour justifier cette dernière limite, il faut passer par la caractérisation séquentielle en considérant une suite (r_k) qui diverge vers $+\infty$, et poser $g_k : \theta \mapsto f(r_k,\theta)$. Les fonctions g_k sont continues par morceaux, la suite (g_k) converge simplement vers la fonction constante $1/a_n$, et (g_k) est majorée par la fonction constante (donc intégrable sur $[0,2\pi]$) $M = \sup_{z\in\mathbb{C}}\left|\frac{z^n}{P(z)}\right|$.

Exercice 7 [Mines PC 2018]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\min_{M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{i,j}(a_{ij} - m_{ij})^2$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $\langle A \mid B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B) = \sum_{i,j} a_{ij}b_{ij}$. Pour ce produit scalaire, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux puisque si S et symétrique et A antisymétrique, $\langle S \mid A\rangle = \mathrm{tr}(S^T A) = \mathrm{tr}(SA) = \mathrm{tr}(AS) = -\mathrm{tr}(A^T S) = -\langle A \mid S\rangle$ donc $\langle S \mid A\rangle = 0$.

Il s'agit donc de minimiser $\|A - M\|^2$ pour $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Ce minimum est atteint lorsque $M = p(A)$ est la projection orthogonale de A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, soit $M = \frac{1}{2}(A + A^T)$. La valeur de ce minimum vaut alors $\left\|\frac{1}{2}(A - A^T)\right\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{i,j}(a_{ij} - a_{ji})^2$.

Exercice 8 [X PC 2020]

Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$, et $p \in]0,1[$. On considère k joueurs. Chacun d'eux lance au plus n fois une pièce donnant pile avec la probabilité p, et s'arrête lorsqu'il obtient pile. Le nombre de points obtenu par ce joueur est égal au nombre de face obtenu (il marque donc n points s'il n'obtient jamais pile).

a. Déterminer la loi du nombre de points obtenus par un joueur donné.

b. Le gagnant est celui qui a obtenu le moins de points. déterminer la probabilité qu'il n'y ait qu'un seul gagnant.

a. Notons X la variable aléatoire égal au nombre de points obtenus. On a $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et pour tout $j \in [\![0,n-1]\!]$, $\mathbb{P}(X=j) = q^j p$ et $\mathbb{P}(X=n) = q^n$ (avec $q = 1-p$).

b. Notons $X_1,\ldots,X_k$ le nombre de points des différents joueurs. Sans perte de généralité on peut supposer que $X_k = \min(X_1,\ldots,X_k)$. Il s'agit maintenant de calculer $\mathbb{P}(X_1 > j,\ldots,X_{k-1} > j \mid X_k = j) = \mathbb{P}(X > j)^{k-1}$ par indépendance.

Pour $j < n$, $\mathbb{P}(X > j) = \displaystyle\sum_{i=j+1}^{n-1} pq^i + q^n = q^{j+1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 > X_k,\ldots,X_{k-1} > X_k) &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_1 > j,\ldots,X_{k-1} > j \mid X_k = j)\mathbb{P}(X_k = j) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} q^{(j+1)(k-1)} pq^j = pq^{k-1} \sum_{j=0}^{n-1} q^{kj} = \frac{pq^{k-1}(1-q^{kn})}{1-q^k}
\end{aligned}$$