2021

Préparation aux oraux – 3

Exercice 1 [CCP PC 2018 – Marie Dubromel]

a. On considère $\omega > 0$ et l'équation différentielle (E) : $y'' + \omega^2 y = 0$. Déterminer les solutions de (E) et trouver la solution y telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère y une solution de $y'' + q(x)y = 0$ vérifiant $y(\alpha) = 0$.

b. Montrer que si $y'(\alpha) = 0$ alors y est la fonction nulle.

c. Montrer que s'il existe une suite de réels (a_n) de limite α telle que pour tout entier naturel n on ait $a_n \neq \alpha$ et $y(a_n) = 0$, alors $y'(\alpha) = 0$.

d. En déduire que si y n'est pas la fonction nulle, alors les zéros de y sont isolés, c'est à dire qu'il existe un intervalle ouvert de centre α où α est le seul zéro de y.

Soient q_1 et q_2 deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $q_2 \geqslant q_1$. Soient y_1 une solution non nulle de (E_1) : $y'' + q_1(x)y = 0$ ayant α et β pour zéros consécutifs et y_2 une solution non nulle de (E_2) : $y'' + q_2(x)y = 0$. On souhaite montrer que y_2 s'annule sur $[\alpha, \beta]$ en procédant par l'absurde.

e. Justifier que l'on peut supposer que sur $[\alpha, \beta]$, $y_1 \geqslant 0$ et $y_2 > 0$.

f. Soit $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$. Montrer que W est décroissante, calculer $W(\alpha)$ et $W(\beta)$, rechercher leur signe et conclure.

g. Montrer que si $q_1 - q_2$ n'est pas l'application nulle sur $[\alpha, \beta]$, alors y_2 s'annule sur $]\alpha, \beta[$.

h. Application : Soit f une solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + e^{|x|}y = 0$ autre que zéro. Montrer que la distance entre deux zéros consécutifs de f est inférieure ou égale à π.

Exercice 2 [Centrale PC 2018 – Inès Araujo]

Soit X une variable aléatoire discrète suivant une loi géométrique de paramètre p. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$.

a. Quelles sont les valeurs prises par Y ? Donner la loi de Y.

b. Justifier, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, l'existence de $\mathbb{E}(Y^m)$.

c. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p_1 et p_2. On pose $U = X_1 + X_2$ et $T = X_1 - X_2$.

d. Calculer la covariance de U et T. Ces variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 [Mines PSI 2016 – Benjamin Pinet]

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(V)$. On pose : $\Gamma_f = \left\{ u \in \mathcal{L}(V) \,\middle|\, u \circ f = f \circ u \right\}$.

a. Montrer que Γ_f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V)$ stable par composition.

b. On suppose f diagonalisable. Montrer que $u \in \Gamma_f$ si et seulement si les sous-espaces propres de f sont stables par u. Déterminer $\dim \Gamma_f$.

c. On suppose que $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\phi \in \mathcal{L}(V)$ défini par $\phi(M) = M^T$. Déterminer $\dim \Gamma_\phi$.

Exercice 4 [X PC 2018 – Charles Millancourt]

Soit (b_n) une suite strictement croissante de réels de limite $+\infty$, et (a_n) une suite réelle telle que $\lim \left(\dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \right) = \ell$.

Montrer que $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \ell$.

Exercice 5 [CCP PC 2018 – Sann Chai]

Soit $A \in \mathbb{C}$ et $M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer $\mathrm{tr}(M_a)$ et $\mathrm{tr}(M_a^2)$.

b. On note h_a l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à M_a. Déterminer $\mathrm{Ker}(h_a)$, et en déduire $\mathrm{rg}(M_a)$.

c. Calculer le polynôme caractéristique de M_a. Préciser son spectre, puis montrer que M_a est diagonalisable si et seulement si $a \neq 0$ et $a \neq 1$.

Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{rg}(A) = 2$.

d. Montrer que le polynôme caractéristique de A peut s'écrire $X^{n-2}P(X)$ avec P polynôme unitaire de degré 2, à coefficients complexes.

e. On note λ_1 et λ_2 les deux racines de P. Calculer $\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}(A^2)$. En déduire que $P(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \frac{1}{2}\big((\mathrm{tr}\,A)^2 - \mathrm{tr}(A^2)\big)$.

f. On suppose $(\mathrm{tr}\,A)^2 = \mathrm{tr}(A^2)$. A est-elle diagonalisable ?

g. On suppose $(\mathrm{tr}\,A)^2 \neq \mathrm{tr}(A^2)$. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 6 [Centrale PC 2018 – Thomas Mavoïan]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ st $x \neq y$ et $g(x,x) = f'(x)$.

a. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. On suppose f de classe $\mathscr{C}^2$; montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 [Mines PC 2016 – Carla Dubois]

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2x^2}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a}{x^2}$ avec a constante que l'on précisera.

c. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 8 [X PC 2018 – Camille Marinutti]

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et u et v deux endomorphismes vérifiant $u \circ v - v \circ u = \alpha u$, où $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Montrer que u et v admettent un vecteur propre commun.