corrigé

Préparation aux oraux – 3

Exercice 1 [CCP PC 2018]

a. On considère $\omega > 0$ et l'équation différentielle (E) : $y'' + \omega^2 y = 0$. Déterminer les solutions de (E) et trouver la solution y telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère y une solution de $y'' + q(x)y = 0$ vérifiant $y(\alpha) = 0$.

b. Montrer que si $y'(\alpha) = 0$ alors y est la fonction nulle.

c. Montrer que s'il existe une suite de réels (a_n) de limite α telle que pour tout entier naturel n on ait $a_n \neq \alpha$ et $y(a_n) = 0$, alors $y'(\alpha) = 0$.

d. En déduire que si y n'est pas la fonction nulle, alors les zéros de y sont isolés, c'est à dire qu'il existe un intervalle ouvert de centre α où α est le seul zéro de y.

Soient q_1 et q_2 deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $q_2 \geqslant q_1$. Soient y_1 une solution non nulle de (E_1) : $y'' + q_1(x)y = 0$ ayant α et β pour zéros consécutifs et y_2 une solution non nulle de (E_2) : $y'' + q_2(x)y = 0$. On souhaite montrer que y_2 s'annule sur $[\alpha, \beta]$ en procédant par l'absurde.

e. Justifier que l'on peut supposer que sur $[\alpha, \beta]$, $y_1 \geqslant 0$ et $y_2 > 0$.

f. Soit $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$. Montrer que W est décroissante, calculer $W(\alpha)$ et $W(\beta)$, rechercher leur signe et conclure.

g. Montrer que si $q_1 - q_2$ n'est pas l'application nulle sur $[\alpha, \beta]$, alors y_2 s'annule sur $]\alpha, \beta[$.

h. Application : Soit f une solution sur $\mathbb{R}$ de $y'' + e^{|x|} y = 0$ autre que zéro. Montrer que la distance entre deux zéros consécutifs de f est inférieure ou égale à π.

a. Les solutions s'écrivent $y(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$, et les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y(0) = 1$ imposent $y(x) = \dfrac{1}{\omega}\sin(\omega x)$.

b. La fonction nulle est solution de l'équation différentielle avec les conditions initiales $y(\alpha) = y'(\alpha) = 0$, et par unicité de la solution au problème de Cauchy, c'est la seule solution vérifiant ces deux conditions.

c. Par caractérisation séquentielle, $y'(\alpha) = \lim \dfrac{y(a_n) - y(\alpha)}{a_n - \alpha} = 0$.

d. Supposons qu'il existe un zéro non isolé α de y. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'intervalle $\left]\alpha - \dfrac{1}{n}, \alpha + \dfrac{1}{n}\right[$ contient un zéro a_n autre que α. D'après la question précédente ceci implique que $y'(\alpha) = 0$, puis que y est la fonction nulle, ce qui est contraire aux hypothèses.

e. $-y_1$ et $-y_2$ sont aussi solutions de (E_1) et E_2 et ont mêmes zéros que y_1 et y_2, donc quitte à remplacer chacune de ces deux fonctions par leur opposé on peut supposer $y_1 \geqslant 0$ et $y_2 > 0$ sur $[\alpha, \beta]$.

f. On calcule $W' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 = (q_1 - q_2) y_1 y_2 \leqslant 0$ donc W est décroissante sur $[\alpha, \beta]$. On a $W(\alpha) = -y_1'(\alpha) y_2(\alpha)$ et $W'(\beta) = -y_1'(\beta) y_2(\beta)$. Or $y_1'(\alpha) = \lim\limits_{x \to \alpha^+} \dfrac{y_1(x) - y_1(\alpha)}{x_1 - \alpha} = \lim\limits_{x \to \alpha^+} \dfrac{y_1(x)}{x_1 - \alpha} \geqslant 0$ et $y_1'(\beta) = \lim\limits_{x \to \beta^-} \dfrac{y_1(\beta) - y_1(x)}{\beta - x} = \lim\limits_{x \to \beta^-} \dfrac{-y_1(x)}{\beta - x} \leqslant 0$ donc $W(\alpha) \leqslant 0$ et $W(\beta) \geqslant 0$.
Sachant que W est décroissante on en déduit que $W = 0$ sur $[\alpha, \beta]$, ce qui impose $y_1'(\alpha) = y_1'(\beta) = 0$, puis $y_1 = 0$ d'après la question b, ce qui est absurde. On en déduit que y_2 s'annule sur $[\alpha, \beta]$.

g. Supposons $y_2 > 0$ sur $]\alpha, \beta[$. Le raisonnement précédent continue à s'appliquer, et conduit à $W = 0$ sur $[\alpha, \beta]$, puis $W' = 0$. Mais de l'expression de W' on déduit que $q_1 - q_2 = 0$ sur $]\alpha, \beta[$, puis sur $[\alpha, \beta]$ par continuité.

h. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{|x|} \geqslant 1$ donc on peut appliquer ce qui précède à $q_1(x) = 1$ et $q_2(x) = |x|$.
Soit y_2 une solution non nulle de (E_2), et α une de ses racines. La fonction $y_1 : x \mapsto \sin(x - \alpha)$ est solution de (E_1) et α et $\alpha + \pi$ sont de ses racines consécutives, donc d'après ce qui précède, y_2 possède un zéro dans $]\alpha, \alpha + \pi[$, ce qui montre que deux zéros consécutifs de y_2 sont à une distance inférieure ou égale à π.

Exercice 2 [Centrale PC 2018]

Soit X une variable aléatoire discrète suivant une loi géométrique de paramètre p. On pose $Y = \frac{1}{X}$.

a. Quelles sont les valeurs prises par Y ? Donner la loi de Y.

b. Justifier, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, l'existence de $\mathbb{E}(Y^m)$.

c. Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p_1 et p_2. On pose $U = X_1 + X_2$ et $T = X_1 - X_2$.

d. Calculer la covariance de U et T. Ces variables sont-elles indépendantes ?

a. Y prend ses valeurs dans $\left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$, et $\mathbb{P}(Y = 1/n) = \mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}$.

b. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $0 < \frac{1}{n^m} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \frac{1}{n^m}\mathbb{P}(Y = n) \leqslant \mathbb{P}(Y = n)$, donc la série $\sum \frac{1}{n^m}\mathbb{P}(Y = n)$ converge.

c. $\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p(1-p)^{n-1}}{n} = \frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^n}{n} = -\frac{p\ln p}{1-p}$.

d. $\operatorname{cov}(U,T) = \mathbb{E}(UT) - \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(T)$.

On a $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ et $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}$.

$\mathbb{E}(UT) = \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_2^2)$. Or $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$ donc $\mathbb{E}(UT) = \frac{2-p_1}{p_1^2} - \frac{2-p_2}{p_2^2}$ et en définitive, $\operatorname{cov}(U,T) = \frac{1-p_1}{p_1^2} - \frac{1-p_2}{p_2^2}$.

On a $\operatorname{cov}(U,T) = 0 \iff (p_1 - p_2)(p_1 + p_2 - p_1p_2) = 0 \iff p_1 = p_2$ car $p_1 + p_2 - p_1p_2 = 0 \iff p_2 = \frac{-p_1}{1-p_1} < 0$ est impossible.

On en déduit que si $p_1 \neq p_2$, alors U et T ne sont pas indépendantes.

Réciproquement, si $p_1 = p_2 = p$, on calcule $\mathbb{P}(U = 2, T = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1) = p^2$ puis :

$$\mathbb{P}(U = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 1) = p^2 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = n)\mathbb{P}(X_2 = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2n-2} = \frac{p}{2-p}$$

donc $\mathbb{P}(U = 2, T = 0) \neq \mathbb{P}(U = 2)\mathbb{P}(T = 0)$; les variables U et T ne sont jamais indépendantes.

Exercice 3 [Mines PSI 2016]

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(V)$. On pose : $\Gamma_f = \left\{u \in \mathcal{L}(V) \;\middle|\; u \circ f = f \circ u\right\}$.

a. Montrer que Γ_f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V)$ stable par composition.

b. On suppose f diagonalisable. Montrer que $u \in \Gamma_f$ si et seulement si les sous-espaces propres de f sont stables par u. Déterminer $\dim \Gamma_f$.

c. On suppose que $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\phi \in \mathcal{L}(V)$ défini par $\phi(M) = M^T$. Déterminer $\dim \Gamma_\phi$.

a. L'endomorphisme nul appartient à Γ_f.

Si $(u,v) \in \Gamma_f^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda u + v)\circ f = \lambda u \circ f + v \circ f = \lambda f \circ u + f \circ v = f \circ (\lambda u + v)$ donc $\lambda u + v \in \Gamma_f$.

Enfin, $(u \circ v)\circ f = u \circ (v \circ f) = u \circ (f \circ v) = (u \circ f)\circ v = (f \circ u)\circ v = f \circ (u \circ v)$ donc $u \circ v \in \Gamma_f$.

Γ_f est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V)$ stable par composition.

b. Soit $u \in \Gamma_f$, et $E_\lambda(f)$ un sous-espace propre pour la valeur propre $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$. Pour tout $x \in E_\lambda$, $f(u(x)) = u(f(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x)$ donc $u(x) \in E_\lambda$. Les sous-espaces propres de f sont bien stables par u.

Réciproquement, soit $u \in \mathcal{L}(V)$ tels que les sous-espaces propres de f soient stables par u. Soit (e) une base formée de vecteurs propres, avec $f(e_i) = \lambda_i e_i$. Puisque les sous-espaces propres sont stables par u, on a $f(u(e_i)) = \lambda_i u(e_i) =$

$u(\lambda_i e_i) = u(f(e_i))$. Les endomorphismes $u \circ f$ et $f \circ u$ coïncident sur une base donc sont égaux, et ainsi, $u \in \Gamma_f$.

Posons $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ et $n_k = \dim \mathrm{E}_{\lambda_k}$. Il existe une base pour laquelle $\mathrm{Mat}_{(e)}(f) = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 \mathrm{I}_{n_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\lambda_p \mathrm{I}_{n_p}} \end{pmatrix}$ et d'après ce qui précède, $u \in \Gamma_f$ si et seulement si $\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{A}_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\mathrm{A}_p} \end{pmatrix}$ avec $\mathrm{A}_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$.

On en déduit que $\dim \Gamma_f = \sum_{i=1}^{p} n_i^2$.

c. ϕ est diagonalisable : on a $\mathrm{Sp}(\phi) = \{-1, 1\}$ avec $\mathrm{Ker}(\phi - \mathrm{Id}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (sous-espace vectoriel des matrices symétriques) et $\mathrm{Ker}(\phi + \mathrm{Id}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques). $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ donc $\dim \Gamma_\phi = \dfrac{n^2(n^2+1)}{2}$.

Exercice 4 [X PC 2018]

Soit (b_n) une suite strictement croissante de réels de limite $+\infty$, et (a_n) une suite réelle telle que $\lim \left(\dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \right) = \ell$. Montrer que $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \ell$.

C'est une variation du théorème de Cesàro. On commence par écrire $\dfrac{a_n - a_0}{b_n - b_0} - \ell = \dfrac{1}{b_n - b_0} \sum_{k=0}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \left(\dfrac{a_{k+1} - a_k}{b_{k+1} - b_k} - \ell \right)$.

Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang N à partir duquel $\left| \dfrac{a_{k+1} - a_k}{b_{k+1} - b_k} - \ell \right| \leqslant \epsilon$. Pour $n \geqslant \mathrm{N}$ on a alors :

$$\left| \frac{a_n - a_0}{b_n - b_0} - \ell \right| \leqslant \frac{1}{b_n - b_0} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} (b_{k+1} - b_k) \left| \frac{a_{k+1} - a_k}{b_{k+1} - b_k} - \ell \right| + \frac{\epsilon}{b_n - b_0} \sum_{k=\mathrm{N}}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \leqslant \frac{\mathrm{M}}{b_n - b_0} + \epsilon$$

où M est une constante. Il existe donc un rang $\mathrm{N}' \geqslant \mathrm{N}$ tel que pour $n \geqslant \mathrm{N}'$, $\left| \dfrac{a_n - a_0}{b_n - b_0} - \ell \right| \leqslant 2\epsilon$.

Nous avons donc prouvé que $\lim \dfrac{a_n - a_0}{b_n - b_0} = \ell$, et puisque $\lim \dfrac{a_0}{b_n - b_0} = 0$ et $\dfrac{a_n}{b_n - b_0} \sim \dfrac{a_n}{b_n}$, on a aussi $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \ell$.

Exercice 5 [CCP PC 2018]

Soit $\mathrm{A} \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{M}_a = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer $\mathrm{tr}(\mathrm{M}_a)$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{M}_a^2)$.

b. On note h_a l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à M_a. Déterminer $\mathrm{Ker}(h_a)$, et en déduire $\mathrm{rg}(\mathrm{M}_a)$.

c. Calculer le polynôme caractéristique de M_a. Préciser son spectre, puis montrer que M_a est diagonalisable si et seulement si $a \neq 0$ et $a \neq 1$.

Soit $n \geqslant 2$ et $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 2$.

d. Montrer que le polynôme caractéristique de A peut s'écrire $\mathrm{X}^{n-2}\mathrm{P}(\mathrm{X})$ avec P polynôme unitaire de degré 2, à coefficients complexes.

e. On note λ_1 et λ_2 les deux racines de P. Calculer $\mathrm{tr}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^2)$. En déduire que $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 - \mathrm{tr}(\mathrm{A})\mathrm{X} + \dfrac{1}{2}\left((\mathrm{tr}\,\mathrm{A})^2 - \mathrm{tr}(\mathrm{A}^2)\right)$.

f. On suppose $(\mathrm{tr}\,\mathrm{A})^2 = \mathrm{tr}(\mathrm{A}^2)$. A est-elle diagonalisable ?

g. On suppose $(\mathrm{tr}\,\mathrm{A})^2 \neq \mathrm{tr}(\mathrm{A}^2)$. A est-elle diagonalisable ?

a. $\operatorname{tr}(M_a) = a + 1$ et $\operatorname{tr}(M_a^2) = a^2 + 1$.

b. $\operatorname{Ker}(h_a) = \operatorname{Vect}(1, -a, a)$ donc d'après le théorème du rang, $\operatorname{rg}(M_a) = 2$.

c. On calcule $\chi_{M_a}(x) = x(x-1)(x-a)$ donc $\operatorname{Sp}(M_a) = \{0, 1, a\}$.

Si $a \notin \{0, 1\}$, M_a possède trois sous-espaces propres de dimension 1 donc est diagonalisable ; si $a = 0$, 0 est valeur propre d'ordre 2 alors que $\dim(\operatorname{Ker}(h_a)) = 1$ donc M_a n'est pas diagonalisable ; si $a = 1$, 1 est valeur propre d'ordre 2 alors que $\dim(\operatorname{Ker}(h_a - \operatorname{Id})) = 1$ donc M_a n'est pas diagonalisable.

d. Su $\operatorname{rg}(A) = 2$, $\dim(\operatorname{Ker} A) = n - 2$ donc 0 est valeur propre d'ordre *au moins* $n - 2$, ce qui prouve que X^{n-2} divise χ_A.

e. On a $\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\operatorname{tr}(A^2) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$ donc $\lambda_1\lambda_2 = \dfrac{1}{2}\Big(\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\Big)$. Or $P(X) = X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)X + \lambda_1\lambda_2$ donc $P(X) = X^2 - (\operatorname{tr} A)X + \dfrac{1}{2}\Big((\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\Big)$.

f. Si $(\operatorname{tr} A)^2 = \operatorname{tr}(A^2)$ alors λ_1 ou λ_2 est nul, et 0 est valeur propre d'ordre au moins $n - 1$ alors que $\dim(\operatorname{Ker} A) = n - 2$, donc A n'est pas diagonalisable.

g. Si $(\operatorname{tr} A)^2 \neq \operatorname{tr}(A^2)$ alors $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$ donc 0 est valeur propre d'ordre $n - 2$. Cependant, on ne peut rien en conclure, comme le montre l'exemple de M_a : pour $a \neq 0$ on a $(\operatorname{tr} M_a)^2 \neq \operatorname{tr}(M_a^2)$ et pourtant, pour $a = 1$, M_a n'est pas diagonalisable alors que pour $a \notin \{0, 1\}$, M_a est diagonalisable.

Exercice 6 [Centrale PC 2018]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ st $x \neq y$ et $g(x, x) = f'(x)$.

a. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b. On suppose f de classe $\mathscr{C}^2$; montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

a. Pour tout $x \neq y$, $g(x, y) = \dfrac{1}{y - x}\displaystyle\int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f'\Big((1-u)x + uy\Big)\mathrm{d}u$, en posant $t = (1-u)x + uy$. Cette formule reste valable pour $x = y$.

On prouve la continuité de g en (x, y) par caractérisation séquentielle : si (x_n, y_n) est une suite qui converge vers (x, y) on applique le théorème de convergence dominée à $u_n = \displaystyle\int_0^1 f'\Big((1-u)x_n + uy_n\Big)\mathrm{d}u$: il existe un rang à partir duquel $(1-u)x_n + uy_n$ appartient au segment $[x-1, y+1]$ (puisque cette suite converge vers un point du segment $[x, y]$) et puisque f' est continue sur le segment $[x-1, y+1]$ il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $u \in [0, 1]$, $\Big|f'\Big((1-u)x_n + uy_n\Big)\Big| \leqslant M$, ce qui continue l'hypothèse de domination.

b. Le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre permet de prouver sans peine que g possède des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ égales à $\partial_1 g(x, y) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)f''\Big((1-u)x + uy\Big)\mathrm{d}u$ et $\partial_2 g(x, y) = \displaystyle\int_0^1 uf''\Big((1-u)x + uy\Big)\mathrm{d}u$.

Il reste à prouver que celles-ci sont continues sur $\mathbb{R}^2$. Pour cela on utilise de nouveau la caractérisation séquentielle en considérant une suite (x_n, y_n) qui converge vers (x, y) et en appliquant le théorème de convergence dominée aux suites $u_n = \partial_1 g(x_n, y_n) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)f''\Big((1-u)x_n + uy_n\Big)\mathrm{d}u$ et $v_n = \partial_2 g(x_n, y_n) = \displaystyle\int_0^1 uf''\Big((1-u)x_n + uy_n\Big)\mathrm{d}u$ (l'hypothèse de domination résulte du fait que f'' est bornée sur le segment $[x-1, y+1]$, comme pour la première question).

Exercice 7 [Mines PC 2016]

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2x^2}$.

a. Déterminer le domaine de définition de f. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{a}{x^2}$ avec a constante que l'on précisera.

c. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Notons $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{1+n^2x^2}$. Pour tout $x \neq 0$, $f_n(x) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la convergence de la série est absolue sur $\mathbb{R}^*$, et il y a divergence grossière pour $x = 0$. La fonction est paire donc on ne l'étudie que sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $a > 0$. Sur $[a, +\infty[$, $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{1+a^2n^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la convergence est normale, donc uniforme, sur $[a, +\infty[$. Les fonctions f_n étant continue, f est donc continue sur tout intervalle $[a, +\infty[$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$ par recouvrement.

b. Posons $a = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Alors $f(x) - \frac{a}{x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2x^2(1+n^2x^2)}$ donc $\left|f(x) - \frac{a}{x^2}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2x^2(1+n^2x^2)} \leqslant \frac{1}{x^4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Ceci montre que $f(x) \underset{+\infty}{=} \frac{a}{x^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^4}\right)$ donc que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{a}{x^2}$.

On a $a + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 2\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ donc $a = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

c. D'après les questions précédentes, f est continue sur $]0, +\infty[$ et $f(x) \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$. De plus, le critère spécial relatif aux séries alternées permet de prouver que $|f(x)| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$ donc au voisinage de 0, $f(x) \underset{0}{=} \mathrm{O}(1)$, ce qui prouve que f est intégrable sur $]0, 1]$. f est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Posons $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2x^2}$. On a $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} r_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} + \int_0^{+\infty} r_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Le critère spécial relatif aux séries alternées permet de majorer $|r_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+(n+1)^2x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$, et puisque $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est intégrable, appliquer le théorème de convergence dominée pour prouver que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} r_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\frac{\pi \ln 2}{2}$ (calcul classique).

Exercice 8 [X PC 2018]

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et u et v deux endomorphismes vérifiant $u \circ v - v \circ u = \alpha u$, où $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Montrer que u et v admettent un vecteur propre commun.

Si $u(x) = 0_\mathrm{E}$ alors $u\big(v(x)\big) = 0_\mathrm{E}$, donc $\mathrm{Ker}\,u$ est stable par v. Si on montre que $\dim(\mathrm{Ker}\,u) \geqslant 1$ on pourra alors considérer l'induit de v sur $\mathrm{Ker}\,u$, qui en tant qu'endomorphisme sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle possède au moins une valeur propre, et donc des vecteurs propres, vecteurs propres communs à v et à u (associés à la valeur propre 0 pour ce dernier).

Pour montrer que u n'est pas injectif on considère l'endomorphisme ϕ de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ défini par $\phi(f) = f \circ v - v \circ f$. On a $\phi(u) = \alpha u$ et il est facile de prouver par récurrence que $\phi(u^k) = k\alpha u^k$. Puisque ϕ ne peut avoir qu'un nombre fini de valeurs propres et que $\alpha \neq 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0$, ce qui prouve que u n'est pas injectif.