Préparation aux oraux – 2

Exercice 1 [TPE PC 2018 – Lucile Fouquet]

On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\langle A \mid B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$.
Soit $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

a. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.

c. Calculer la distance entre J et $\mathcal{F}$.

Exercice 2 [Centrale PC 2018 – Édouard Lécrivain]

Soit $\alpha > 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$.

a. Montrer que $I_n(\alpha)$ est bien définie.

b. Etablir une relation de récurrence liant $I_n(\alpha)$ et $I_{n+1}(\alpha)$.

c. Déterminer la limite de la suite $(I_n(\alpha))_{n\geqslant 1}$.

d. Montrer l'existence de $k(\alpha) > 0$ tel que $I_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{k(\alpha)}{n^{1/\alpha}}$.

Exercice 3 [Mines PC 2018 – Maïwenn Le Denic]

Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T \geqslant n) > 0$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta_n = \mathbb{P}(T = n \mid T \geqslant n)$.

a. Montrer que les θ_n sont dans $[0,1[$.

b. Exprimer $\mathbb{P}(T \geqslant n)$ en fonction des θ_n, puis montrer que la série $\sum \theta_n$ diverge.

c. Réciproquement, si (θ_n) est une suite d'éléments de $[0,1[$ telle que la série $\sum \theta_n$ diverge, montrer l'existence d'une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(T \geqslant n) > 0$ et $\mathbb{P}(T = n \mid T \geqslant n) = \theta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 [X PC 2018 – Liam Deray]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ on pose :

$$D(a_1,\dots,a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad [a_1,\dots,a_n] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ on a $[a_1,\dots,a_n] = \dfrac{D(a_1,\dots,a_n)}{D(a_2,\dots,a_n)}$.

Exercice 5 [CCP PC 2018 – Thomas De Brébisson]

Soit $a > 0$ et X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = a$.

a. Donner un exemple de variable aléatoire vérifiant ces conditions.

b. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant 2a) \leqslant \mathbb{P}\big((X - a + 1)^2 \geqslant (a+1)^2\big)$.

c. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant 2a) \leqslant \dfrac{1}{a+1}$.

Exercice 6 [Centrale PC 2018 – Barthélémy Demeer]

Soit E un espace euclidien muni d'une base $(e) = (e_1, \dots, e_n)$. On considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid x \rangle e_i$$

a. Montrer que f est un automorphisme symétrique de E.

b. Montrer que $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.

c. Montrer qu'il existe un automorphisme symétrique g tel que $g \circ g = f^{-1}$. g est-il unique ?

d. Soit g un automorphisme symétrique tel que $g \circ g = f^{-1}$. Montrer que $(g(e_1), \dots, g(e_n))$ est une base orthonormée de E.

Exercice 7 [Mines PC 2018 – Clara Haddouche]

Soit $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a. Déterminer le domaine de définition de Γ.

b. Soit $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\mathrm{T}_n(x) = \displaystyle\int_0^{n} t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$. Calculer $\mathrm{T}_n(x)$.

c. Montrer que $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

Exercice 8 [X PC 2020 – Jérémie Maréchaux]

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X \neq 0) > 0$ et d'espérance finie. On définit une variable aléatoire $\widehat{X}$ par : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\widehat{X} = k) = \dfrac{k\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{E}(X)}$.

a. Trouver X lorsque X et $\widehat{X}$ suivent la même loi.

b. Déterminer la loi de X lorsque $X + 1$ et $\widehat{X}$ suivent la même loi.