corrigé

Préparation aux oraux – 2

Exercice 1 [TPE PC 2018]

On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\langle A \mid B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$.
Soit $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

a. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.

c. Calculer la distance entre J et $\mathcal{F}$.

a. $\mathcal{F} = \operatorname{Vect}(I, K)$ avec $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b. On a $\langle I \mid I\rangle = 2$, $\langle K \mid K\rangle = 2$ et $\langle I \mid K\rangle = 0$ donc $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}I, \frac{1}{\sqrt{2}}K\right)$ forme une base orthonormée de $\mathcal{F}$.

Le projeté orthogonal de J sur $\mathcal{F}$ s'écrit donc $p(J) = \frac{1}{2}\langle I \mid J\rangle I + \frac{1}{2}\langle K \mid J\rangle K = I$ et le projeté orthogonal de J sur $\mathcal{F}^\perp$ vaut donc $J - p(J) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c. On a $d(J, \mathcal{F}) = \|J - p(J)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 2 [Centrale PC 2018]

Soit $\alpha > 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$.

a. Montrer que $I_n(\alpha)$ est bien définie.

b. Etablir une relation de récurrence liant $I_n(\alpha)$ et $I_{n+1}(\alpha)$.

c. Déterminer la limite de la suite $(I_n(\alpha))_{n\geqslant 1}$.

d. Montrer l'existence de $k(\alpha) > 0$ tel que $I_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{k(\alpha)}{n^{1/\alpha}}$.

a. Au voisinage de $+\infty$, $\frac{1}{(1+t^\alpha)^n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{n\alpha}}$. Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{n\alpha}}$ converge car $n\alpha \geqslant \alpha > 1$, donc il en est de même de $I_n(\alpha)$.

b. Une intégration par partie donne

$$I_n(\alpha) = \left[\frac{t}{(1+t^\alpha)^n}\right]_0^{+\infty} + n\alpha \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t^\alpha)^{n+1}} = n\alpha \int_0^{+\infty} \frac{1+t^\alpha - 1}{(1+t^\alpha)^{n+1}} = n\alpha(I_n(\alpha) - I_{n+1}(\alpha))$$

donc $I_{n+1}(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{n\alpha}\right) I_n(\alpha)$.

c. On a donc $\ln(I_{n+1}(\alpha)) - \ln(I_n(\alpha)) = \ln\left(\frac{I_{n+1}(\alpha)}{I_n(\alpha)}\right) \sim -\frac{1}{n\alpha}$. Ainsi, la série $\sum\Big(\ln(I_{n+1}(\alpha)) - \ln(I_n(\alpha))\Big)$ diverge ; étant à terme général négatif, ses sommes partielles divergent vers $-\infty$, ce qui par télescopage équivaut à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(I_n(\alpha)) = -\infty$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(\alpha) = 0$.

d. Il s'agit de montrer que $n^{\frac{1}{\alpha}} I_n(\alpha)$ converge vers une limite $k(\alpha) > 0$, ce qui revient à prouver que la suite $u_n = \ln\left(n^{\frac{1}{\alpha}} I_n(\alpha)\right)$ converge vers une limite $\ell(\alpha) = \ln\big(k(\alpha)\big)$.

Or $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{I_{n+1}(\alpha)}{I_n(\alpha)}\right) + \frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n\alpha}\right) + \frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge absolument, ce qui prouve la convergence de la suite (u_n) vers une limite $\ell(\alpha)$; il suffit de poser $k(\alpha) = e^{\ell(\alpha)}$ pour conclure.

Exercice 3 [Mines PC 2018]

Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T \geqslant n) > 0$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta_n = \mathbb{P}(T = n \mid T \geqslant n)$.

a. Montrer que les θ_n sont dans $[0,1[$.

b. Exprimer $\mathbb{P}(T \geqslant n)$ en fonction des θ_n, puis montrer que la série $\sum \theta_n$ diverge.

c. Réciproquement, si (θ_n) est une suite d'éléments de $[0,1[$ telle que la série $\sum \theta_n$ diverge, montrer l'existence d'une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(T \geqslant n) > 0$ et $\mathbb{P}(T = n \mid T \geqslant n) = \theta_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. On a $\mathbb{P}(T \geqslant n+1) = \mathbb{P}(T \geqslant n+1 \text{ et } T \geqslant n) = \mathbb{P}(T \geqslant n+1 \mid T \geqslant n)\mathbb{P}(T \geqslant n) = (1-\theta_n)\mathbb{P}(T \geqslant n)$ et puisque $\mathbb{P}(T \geqslant n+1) > 0$ on en déduit $\theta_n < 1$.

b. De l'égalité ci-dessus on tire aussi $\mathbb{P}(T \geqslant n) = \mathbb{P}(T \geqslant 0)\prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k) = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k)$.

Si la série $\sum \theta_n$ convergeait, on aurait $\lim \theta_n = 0$ et ainsi $\ln(1-\theta_n) \sim -\theta_n$, ce qui prouverait que la série $\sum \ln(1-\theta_n)$ converge, puis, en notant ℓ sa somme, que $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k) = e^{\ell} > 0$.

Cependant, $\mathbb{P}(T \geqslant n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(T = k)$ est le reste d'une série convergente, donc $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T \geqslant n) = 0$. ceci est contradictoire, et permet d'en déduire que la série $\sum \theta_n$ diverge.

c. Si une telle variable aléatoire existe, alors $\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T \geqslant n) - \mathbb{P}(T \geqslant n+1) = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k)$.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k)$. On a $p_n \in [0,1]$ et on prouve par récurrence que $1 - \sum_{k=0}^{n} p_k = \prod_{k=0}^{n}(1-\theta_k)$.

les deux séries $\sum \theta_n$ et $\sum \ln(1-\theta_n)$ sont de même nature (si l'une des deux converge alors $\lim \theta_n = 0$ et dans ce cas $\ln(1-\theta_n) \sim -\theta_n$) donc $\lim \sum_{k=0}^{n} \ln(1-\theta_n) = -\infty$, puis $\lim \prod_{k=0}^{n}(1-\theta_k) = 0$. On en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

De ceci il résulte qu'il existe une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(T = n) = p_n$.

On a alors $\mathbb{P}(T \geqslant n) = \sum_{k=n}^{+\infty} p_n = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} p_k = \prod_{k=0}^{n-1}(1-\theta_k) > 0$ et $\mathbb{P}(T \geqslant n+1 \mid T \geqslant n) = \dfrac{\mathbb{P}(T \geqslant n+1)}{\mathbb{P}(T \geqslant n)} = 1 - \theta_n$ donc $\mathbb{P}(T = n \mid T \geqslant n) = \theta_n$.

Exercice 4 [X PC 2018]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1,\dots,a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ on pose :

$$D(a_1,\dots,a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad [a_1,\dots,a_n] = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ on a $[a_1,\dots,a_n] = \dfrac{D(a_1,\dots,a_n)}{D(a_2,\dots,a_n)}$.

On raisonne par récurrence sur n.

- Si $n = 2$ on a $\dfrac{D(a_1,a_2)}{D(a_2)} = \dfrac{a_1a_2+1}{a_2} = a_1 + \dfrac{1}{a_2} = [a_1,a_2]$.
- Si $n \geqslant 3$, supposons le résultat acquis au rang $n-1$, et développons $D(a_1,\dots,a_n)$ suivant la première colonne :

$$D(a_1,\dots,a_{n+1}) = a_1 D(a_2,\dots,a_{n+1}) - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_3 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{vmatrix}.$$

En développant ce deuxième déterminant suivant la première ligne on obtient :

$$D(a_1,\dots,a_n) = a_1 D(a_2,\dots,a_n) + D(a_3,\dots,a_n)$$

et à l'aide de l'hypothèse de récurrence :

$$\frac{D(a_1,\dots,a_n)}{D(a_2,\dots,a_n)} = a_1 + \frac{D(a_3,\dots,a_n)}{D(a_2,\dots,a_n)} = a_1 + \frac{1}{[a_2,\dots,a_n]} = [a_1,\dots,a_n].$$

Exercice 5 [CCP PC 2018]

Soit $a > 0$ et X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = a$.

a. Donner un exemple de variable aléatoire vérifiant ces conditions.

b. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant 2a) \leqslant \mathbb{P}\big((X-a+1)^2 \geqslant (a+1)^2\big)$.

c. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant 2a) \leqslant \dfrac{1}{a+1}$.

a. C'est le cas d'une variable suivant une loi de Poisson de paramètre a.

b. On a $(X-a+1)^2 \geqslant (a+1)^2 \iff X-a+1 \geqslant a+1$ ou $X-a+1 \leqslant -a-1 \iff X \geqslant 2a$ ou $X \leqslant -2$.
Ainsi, $X \geqslant 2a \implies (X-a+1)^2 \geqslant (a+1)^2$ et donc $\mathbb{P}(X \geqslant 2a) \leqslant \mathbb{P}\big((X-a+1)^2 \geqslant (a+1)^2\big)$.

c. D'après l'inégalité de Markov, $\mathbb{P}\big((X-a+1)^2 \geqslant (a+1)^2\big) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}((X-a+1)^2)}{(a+1)^2}$.
Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}((X-a+1)^2) = E(X^2) - 2(a-1)\mathbb{E}(X) + (a-1)^2 = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 - 2(a-1)\mathbb{E}(X) + (a-1)^2 = a+1$$

donc $\mathbb{P}(X \geqslant 2a) \leqslant \dfrac{1}{a+1}$.

Exercice 6 [Centrale PC 2018]

Soit E un espace euclidien muni d'une base $(e) = (e_1,\dots,e_n)$. On considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid x\rangle e_i$$

a. Montrer que f est un automorphisme symétrique de E.

b. Montrer que $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.

c. Montrer qu'il existe un automorphisme symétrique g tel que $g \circ g = f^{-1}$. g est-il unique ?

d. Soit g un automorphisme symétrique tel que $g \circ g = f^{-1}$. Montrer que $(g(e_1),\dots,g(e_n))$ est une base orthonormée de E.

a. La linéarité de f résulte de la bilinéarité du produit scalaire.
(e) étant une base, $f(x) = 0_E \iff \forall i \in [\![1,n]\!],\ \langle e_i \mid x\rangle = 0 \iff x \in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)^\perp = E^\perp = \{0_E\}$. f est donc injective, puis bijective s'agissant d'un endomorphisme en dimension finie.

Enfin, $\langle f(x) \mid y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid x\rangle\langle e_i \mid y\rangle = \langle x \mid f(y)\rangle$ donc f est un automorphisme symétrique.

b. Soit λ une valeur propre de f, et x un vecteur propre associé. Alors $\lambda\|x\|^2 = \langle f(x) \mid x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid x\rangle^2 \geqslant 0$ donc $\lambda \geqslant 0$ et puisque f est un automorphisme, $\lambda > 0$.

c. Soit (b) une base orthonormée qui diagonalise f, avec $f(b_i) = \lambda_i b_i$. On définit $g \in \mathcal{L}(E)$ en posant $g(b_i) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} b_i$. g est un automorphisme symétrique car sa matrice dans la base orthonormée (b) est diagonale donc symétrique, et de déterminant non nul. Et on a $g \circ g \circ f(b_i) = b_i$ donc $g \circ g \circ f = \mathrm{Id}$.
Notons que g n'est pas unique, par exemple parce que $-g$ convient aussi. Plus précisément, on pourrait montrer qu'il y a exactement 2^n solutions, correspondant au choix des $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ tels que $g(b_i) = \dfrac{\epsilon_i}{\sqrt{\lambda_i}} b_i$.

d. On a $\langle g(e_i) \mid g(e_j)\rangle = \langle e_i \mid g \circ g(e_j)\rangle = \langle e_i \mid f^{-1}(e_j)\rangle$.

Par ailleurs, $e_j = f\big(f^{-1}(e_j)\big) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid f^{-1}(e_j)\rangle e_i$ et par unicité de la décomposition dans une base, $\langle e_i \mid f^{-1}(e_j)\rangle = \delta_{ij}$. Ainsi, $\langle g(e_i) \mid g(e_j)\rangle = \delta_{ij}$; la famille $(g(e_i))$ est orthonormée ; c'est donc une base orthonormée puisque g est un automorphisme.

Exercice 7 [Mines PC 2018]

Soit $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a. Déterminer le domaine de définition de Γ.

b. Soit $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $T_n(x) = \displaystyle\int_0^{n} t^{x-1}\Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^n \mathrm{d}t$. Calculer $T_n(x)$.

c. Montrer que $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \underset{+\infty}{=} O(\mathrm{e}^{-t/2})$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, et $t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{x-1}}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$. On en déduit que Γ est définie sur $]0, +\infty[$.

b. Réalisons n intégrations par parties successives en intégrant $t \mapsto t^{x-1}$ et en dérivant $t \mapsto \Big(1 - \dfrac{t}{n}\Big)^n$ pour obtenir :

$$\forall x > 0, \qquad T_n(x) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\Big(1 - \frac{t}{n}\Big)^{n-k} \frac{t^{x+k}}{x(x+1)\cdots(x+k)}\right]_{t=0}^{t=n} = \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

c. Appliquons maintenant le théorème de convergence dominée, en posant $f_n(t) = \begin{cases} t^{x-1}\Big(1 - \dfrac{t}{n}\Big)^n & \text{si } t \leqslant n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$.

les fonctions f_n sont continues par morceaux, la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $f : t \mapsto t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$, elle-même continue par morceaux et : $\forall t > 0$, $|f_n(t)| \leqslant t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} = \phi(t)$. La fonction ϕ est continue par morceaux et intégrable sur $]0, +\infty[$ donc le théorème de convergence dominée s'applique : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} T_n(x) = \Gamma(x)$.

De la question précédente on déduit immédiatement que $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

Exercice 8 [X PC 2020]

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X \neq 0) > 0$ et d'espérance finie. On définit une variable aléatoire $\widehat{X}$ par : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\widehat{X} = k) = \dfrac{k\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{E}(X)}$.

a. Trouver X lorsque X et $\widehat{X}$ suivent la même loi.

b. Déterminer la loi de X lorsque $X + 1$ et $\widehat{X}$ suivent la même loi.

a. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{k\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{E}(X)}$.

Puisque $\mathbb{P}(X \neq 0) > 0$ il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{P}(X = k) > 0$. Dans ce cas, $\mathbb{E}(X) = k$. Mais l'espérance ne peut prendre qu'une seule valeur, donc $j \neq k \implies \mathbb{P}(X = j) = 0$. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{P}(X = k) = 1$: X est presque surement constante.

b. On suppose que pour tout $k \geqslant 1$, $\mathbb{P}(X = k - 1) = \dfrac{k}{\lambda}\mathbb{P}(X = k)$ avec $\lambda = \mathbb{E}(X)$.

Cette relation s'écrit aussi $\dfrac{(k-1)!}{\lambda^{k-1}}\mathbb{P}(X = k-1) = \dfrac{k!}{\lambda^k}\mathbb{P}(X = k)$ donc il existe $c > 0$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = c\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Mais X est une variable aléatoire entière donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$, ce qui impose $c = \mathrm{e}^{-\lambda}$. Ainsi, X suit une loi de Poisson, et on a bien $\lambda = \mathbb{E}(X)$.