2021

Préparation aux oraux – 1

Exercice 1 [CCP PC 2018 – Timothé Aït Isha-Seraphim]

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

a. Donner une base de $\mathrm{Im}(A)$.

b. Donner une base de $\mathrm{Ker}(A)$.

c. Donner $P \in \mathcal{GL}_4(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que $Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d. Déterminer la dimension de $\left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \,\middle|\, MA = 0\right\}$.

Exercice 2 [Centrale PSI 2016 – Sarah Bakouri]

Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques réelles à valeurs propres strictement positives.

a. Énoncer le théorème spectral.

b. Pour $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

c. Justifier l'unicité de cette matrice B (*Indication : observer que* A *et* B *commutent*).

d. Soit $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M^{\mathrm{T}}M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

e. Montrer alors qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $M = OS$ (décomposition polaire).

f. Justifier l'unicité de O et de S.

Exercice 3 [Mines PC 2016 – Lisa Tekouk]

a. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{R}_+$ telle que $u_n \sim v_n$. On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrer que $\sum v_n$ converge et que $\sum_{k \geqslant n} u_k \sim \sum_{k \geqslant n} v_k$.

b. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$. Montrer que (u_n) converge. On note ℓ sa limite.

c. Donner un équivalent de $u_n - \ell$.

Exercice 4 [X PC 2016 – Lucas Marquier]

Soient a et b dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $a + b = 1$.

a. Montrer que la série de terme général $\binom{2n}{n} a^n b^n$ diverge si et seulement si $a = b = 1/2$.

On se place sur l'axe $\mathbb{Z}$ initialement en 0. On a une probabilité a d'aller à droite, b d'aller à gauche à chaque instant. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note r_n la probabilité d'être en 0 à l'instant n. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note p_n la probabilité d'être pour la première fois de retour en 0 à l'instant n. On pose enfin $R : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} r_n t^n$ et $P : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} p_n t^n$.

b. Montrer que P et R sont définies sur $]-1, 1[$.

c. Montrer que pour $t \in]-1, 1[$, $R(t) = 1 + R(t)P(t)$.

d. Montrer que la probabilité de retour à l'origine est égale à 1 si et seulement si $a = b$.

Exercice 5 [CCP PC 2018 – Sirine Ben Ali]

On note r_n le reste de la division euclidienne de n par 5, et on pose $a_n = \dfrac{r_n}{n(n+1)}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a. Montrer que $\sum a_n$ converge.

b. On pose pour $n \geqslant 2$, $w_n = \ln(n) - \ln(n-1) - \dfrac{1}{n}$. Montrer que $\sum w_n$ converge et en déduire l'existence d'un réel γ tel que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

c. Montrer que $S_{5n} = H_{5n} - H_n$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n$.

Exercice 6 [Centrale PC 2016 – Yashveen Jootun]

Soient $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$, $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} e^{-xt}\,dt$.

a. Justifier la définition de I et de J, puis montrer que $I = J$.

b. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. En déduire la valeur de I.

Exercice 7 [Mines PSI 2016 – Josua Berdugo]

Une urne contient $n \geqslant 2$ boules distinctes $B_1, \ldots, B_n$, que l'on tire successivement avec remise. Soit Y_r la variable aléatoire qui donne le rang du tirage au bout duquel $B_1, \ldots, B_r$ ont été tirées au moins une fois.

a. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_1.

b. Préciser $Y_r(\Omega)$. Que valent $P(Y_r = r)$ et $P(Y_r = r+1)$?

c. On fixe r. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$ on note W_i la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour que, la première fois, i boules distinctes parmi les boules $B_1, \ldots, B_r$ soient sorties (ainsi, $W_r = Y_r$). On pose $X_1 = W_1$ et $X_i = W_i - W_{i-1}$ si $i \geqslant 2$.
Déterminer la loi de X_i ainsi que son espérance.

d. En déduire l'espérance de Y_n. Trouver un équivalent de $E(Y_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 8 [X PC 2020 – François Derrida]

Soit $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^{2n}$, et $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \\ a_1 & \cdots & a_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice M soit diagonalisable.