corrigé

Préparation aux oraux – 1

Exercice 1 **[CCP PC 2018]**

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

a. Donner une base de $\operatorname{Im}(A)$.

b. Donner une base de $\operatorname{Ker}(A)$.

c. Donner $P \in \mathcal{GL}_4(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que $Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d. Déterminer la dimension de $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid MA = 0\}$.

a. Les opérations élémentaires sur les colonnes de A ne modifient pas son image. On effectue les opérations $C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1$ et $C_4 \leftarrow C_4 - C_1 - 3C_3$ pour obtenir $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Il apparaît alors que $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

b. Les opérations élémentaires sur les lignes de A ne modifient pas son noyau. On effectue les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ pour obtenir $A'' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\operatorname{Ker}(A)$ a pour équation $\begin{cases} x - 2y + t = 0 \\ z + 3t = 0 \end{cases}$ ce qui donne par exemple $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

c. Notons (e'_3, e'_4) la base de $\operatorname{Ker}(A)$ qu'on vient d'obtenir, et complétons-la en posant par exemple $e'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour former une base (e') de $\mathbb{R}^4$. Il s'agit bien d'une base puisque la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

Posons $f'_1 = Ae'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $f'_2 = Ae'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Puisque (e'_1, e'_2) engendre un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(A)$, d'après le théorème du rang (f'_1, f'_2) engendre une base de $\operatorname{Im}(A)$, que l'on peut compléter en posant par exemple $f'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il s'agit bien d'une base puisque la matrice $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.

Les formules de changement de base donnent alors $Q^{-1}AP = A'$ avec $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d. On a $MA = 0 \iff MQA'P^{-1} = 0 \iff MQA' = 0 \iff M'A' = 0$ en ayant posé $M' = MQ$. Puisque l'application $M \mapsto MQ$ est bijective (Q est inversible), la dimension demandée est aussi celle de $\{M' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M'A' = 0\}$.

Posons maintenant $M' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Alors $M'A' = 0 \iff a = b = d = e = g = h = 0$ soit $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$ donc $\dim\{M' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M'A' = 0\} = 3$.

Exercice 2 [Centrale PSI 2016]

Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ celui des matrices symétriques réelles à valeurs propres strictement positives.

a. Énoncer le théorème spectral.

b. Pour $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $\mathrm{B} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{B}^2$.

c. Justifier l'unicité de cette matrice B (*Indication : observer que* A *et* B *commutent*).

d. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{M}^\mathrm{T}\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

e. Montrer alors qu'il existe $\mathrm{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{M} = \mathrm{OS}$ (décomposition polaire).

f. Justifier l'unicité de O et de S.

a. Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres : il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $\mathrm{D} = \mathrm{P}^\mathrm{T}\mathrm{AP}$.

b. On applique le théorème spectral à la matrice A, en notant $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$ (les valeurs propres de A). Posons alors $\mathrm{B} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^\mathrm{T}$ avec $\Delta = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. Alors $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$.

c. A et B commutent car $\mathrm{AB} = \mathrm{B}^3 = \mathrm{BA}$. Les sous-espaces propres de A sont donc stables par B, et la restriction de B à ces sous-espaces propres est symétrique. Par le théorème spectral il existe sur chacun des sous-espaces propres de A une base orthonormée qui diagonalise la restriction de B, et en concaténant ces bases on obtient une base orthonormée qui diagonalise A et B. Dès lors on a $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^\mathrm{T}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{PD'P}^\mathrm{T}$ et $\mathrm{A} = \mathrm{B}^2 \iff \mathrm{D} = \mathrm{D}'^2 \iff \mathrm{D}' = \Delta$ car les valeurs propres de B doivent être positives.

d. Posons $\mathrm{A} = \mathrm{M}^\mathrm{T}\mathrm{M}$ on a $\mathrm{A}^\mathrm{T} = \mathrm{A}$ donc A est symétrique. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $\mathrm{A} = \mathrm{M}^\mathrm{T}\mathrm{M}$, il existe $\mathrm{X} \neq 0$ tel que $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}$. Puisque M est inversible, $\mathrm{MX} \neq 0$ et $\|\mathrm{MX}\|^2 = \mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{M}^\mathrm{T}\mathrm{MX} = \mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{X} = \lambda\|\mathrm{X}\|^2$ donc $\lambda > 0$.

e. Il existe donc $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{S}^2 = \mathrm{M}^\mathrm{T}\mathrm{M}$. Posons $\mathrm{O} = \mathrm{MS}^{-1}$; alors $\mathrm{M} = \mathrm{OS}$ et $\mathrm{O}^\mathrm{T}\mathrm{O} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{M}^\mathrm{T}\mathrm{MS}^{-1} = \mathrm{S}^{-1}\mathrm{S}^2\mathrm{S}^{-1} = \mathrm{I}_n$ donc $\mathrm{O} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

f. Réciproquement, si $\mathrm{M} = \mathrm{OS}$ alors $\mathrm{M}^\mathrm{T}\mathrm{M} = \mathrm{S}^2$ et puisque M et S appartiennent à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ la question c) montre que S est unique. Il en est alors de même de $\mathrm{O} = \mathrm{MS}^{-1}$.

Exercice 3 [Mines PC 2016]

a. Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{R}_+$ telle que $u_n \sim v_n$. On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrer que $\sum v_n$ converge et que $\sum_{k \geqslant n} u_k \sim \sum_{k \geqslant n} v_k$.

b. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$. Montrer que (u_n) converge. On note ℓ sa limite.

c. Donner un équivalent de $u_n - \ell$.

a. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang à partir duquel $0 \leqslant v_n \leqslant (1+\epsilon)u_n$. D'après le théorème de comparaison des séries à terme positif, la convergence de $\sum u_n$ entraîne celle de $\sum v_n$.
Plus précisément, pour tout $k \geqslant \mathrm{N}$, $(1-\epsilon)u_k \leqslant v_k \leqslant (1+\epsilon)u_k$ donc pour $n \geqslant \mathrm{N}$, $(1-\epsilon)\sum_{k=n}^{+\infty} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} v_k \leqslant (1+\epsilon)\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$, ce qui signifie que $\sum_{k=n}^{+\infty} u_n \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_n$.

b. Par comparaison à une intégrale, $\int_n^{2n} \frac{\mathrm{d}t}{2t+1} \leqslant u_n \leqslant \int_{n-1}^{2n-1} \frac{\mathrm{d}t}{2t+1}$, soit $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4n+1}{2n+1}\right) \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4n-1}{2n-1}\right)$.
On en déduit que $\lim u_n = \frac{\ln 2}{2}$.

c. On a $u_n - \ell = \sum_{k=n}^{+\infty}(u_k - u_{k+1})$ et $u_k - u_{k+1} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+3} - \frac{1}{4k+1} = \frac{-1}{(4k+3)(4k+1)(2k+1)} \sim \frac{-1}{32k^3}$.

D'après la première question, $u_n - \ell \sim \frac{-1}{32}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{-1}{k^3}$, et une comparaison à une intégrale fournit finalement $u_n - \ell \sim \frac{-1}{64n^2}$.

Exercice 4 [X PC 2016]

Soient a et b dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $a+b=1$.

a. Montrer que la série de terme général $\binom{2n}{n}a^n b^n$ diverge si et seulement si $a=b=1/2$.

On se place sur l'axe $\mathbb{Z}$ initialement en 0. On a une probabilité a d'aller à droite, b d'aller à gauche à chaque instant. Pour $n\in\mathbb{N}$ on note r_n la probabilité d'être en 0 à l'instant n. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ on note p_n la probabilité d'être pour la première fois de retour en 0 à l'instant n. On pose enfin $\mathrm{R}: t\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} r_n t^n$ et $\mathrm{P}: t\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} p_n t^n$.

b. Montrer que P et R sont définies sur $]-1,1[$.

c. Montrer que pour $t\in]-1,1[$, $\mathrm{R}(t) = 1+\mathrm{R}(t)\mathrm{P}(t)$.

d. Montrer que la probabilité de retour à l'origine est égale à 1 si et seulement si $a=b$.

a. À l'aide de la formule de Stirling, $\binom{2n}{n}a^n b^n \sim \frac{(4ab)^n}{\sqrt{\pi n}}$.
Une étude de la fonction $x\mapsto 4x(1-x)$ sur $]0,1[$ montre que pour tout $x\in]0,1[\setminus\{1/2\}$, $0<4x(1-x)<1$ donc si $(a,b)\neq(1/2,1/2)$, $\binom{2n}{n}a^n b^n = \mathrm{O}(\rho^n)$ avec $\rho<1$ et $\sum\binom{2n}{n}a^n b^n$ converge.
En revanche, si $a=b=1/2$ alors $\binom{2n}{n}a^n b^n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ et $\sum\binom{2n}{n}a^n b^n$ diverge.

b. Notons A_n l'événement : « être pour la première fois de retour en 0 à l'instant n », et $\mathrm{A}=\bigcup \mathrm{A}_n$. Ces événements sont mutuellement incompatibles donc $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \leqslant 1$ et la série $\sum p_n$ converge. Le rayon de convergence de P est donc supérieur ou égal à 1.
Notons B_n l'événement « être de retour en 0 à l'instant n ». On a $\mathrm{B}_n \subset \bigcup_{k=1}^{n}\mathrm{A}_k$ donc $r_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k \leqslant 1$.
La série entière $\sum t^k$ a un rayon de convergence égal à 1 donc le rayon de convergence de R est au moins égal à 1.

c. Par produit de Cauchy, $\mathrm{R}(t)\mathrm{P}(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k r_{n-k}\right)t^n$.
D'après la formule des probabilités totales, pour tout $n\geqslant 1$, $r_n = \sum_{k=1}^{n} p_k \mathbb{P}(\mathrm{B}_n \mid \mathrm{A}_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k\mathbb{P}(\mathrm{B}_{n-k}) = \sum_{k=1}^{n} p_k r_{n-k}$.
On en déduit que $\mathrm{R}(t)\mathrm{P}(t) = \mathrm{R}(t)-1$.

d. Si la série R(1) converge, on a $\mathrm{P}(1) = 1-\frac{1}{\mathrm{R}(1)} < 1$: la probabilité de retour à l'origine est strictement inférieure à 1.
Si la série R(1) diverge, il n'est pas difficile de montrer que $\mathrm{P}(1) = \lim_{t\to 1}\mathrm{P}(t)$ et $\lim_{t\to 1}\mathrm{R}(t) = +\infty$ et de l'égalité $\mathrm{P}(t) = 1-\frac{1}{\mathrm{R}(t)}$ on tire $\mathrm{P}(1)=1$.
Ainsi, la probabilité de retour à l'origine est égale à 1 si et seulement si R(1) diverge.
Or pour être de retour à l'origine à la date $2n$ il faut s'être déplacé de n cases vers la gauche et de n cases vers la droite donc $r_{2n+1}=0$ et $r_{2n} = \binom{2n}{n}a^n b^n$. Et d'après la première question, $\sum r_n$ diverge si et seulement si $a=b=1/2$.

Exercice 5 [CCP PC 2018]

On note r_n le reste de la division euclidienne de n par 5, et on pose $a_n = \dfrac{r_n}{n(n+1)}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ et $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

a. Montrer que $\sum a_n$ converge.

b. On pose pour $n \geqslant 2$, $w_n = \ln(n) - \ln(n-1) - \dfrac{1}{n}$. Montrer que $\sum w_n$ converge et en déduire l'existence d'un réel γ tel que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

c. Montrer que $S_{5n} = H_{5n} - H_n$. En déduire la valeur de $\sum_{n\geqslant 1} a_n$.

a. r_n ne prend que 5 valeurs distinctes donc est borné ; on en déduit que $a_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc la série positive $\sum a_n$ converge.

b. $w_n = -\ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc la série $\sum w_n$ converge absolument.

Par télescopage, $\sum_{k=2}^{n} w_k = \ln(n) - \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k}$ donc $H_n = \ln n + 1 - \sum_{k=2}^{n} w_k$ et en posant $\gamma = 1 - \sum_{n=2}^{+\infty} w_n$ on a $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

c. Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que $S_{5n} = H_{5n} - H_n$.

- Si $n = 1$, $S_5 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} = H_5 - H_1$.
- Si $n \geqslant 1$, supposons $S_{5n} = H_{5n} - H_n$. Alors :

$$\begin{aligned}
S_{5n+5} &= S_{5n} + \frac{1}{(5n+1)(5n+2)} + \frac{2}{(5n+2)(5n+3)} + \frac{3}{(5n+3)(5n+4)} + \frac{4}{(5n+4)(5n+5)} \\
&= H_{5n} - H_n + \left(\frac{1}{5n+1} - \frac{1}{5n+2}\right) + 2\left(\frac{1}{5n+2} - \frac{1}{5n+3}\right) + 3\left(\frac{1}{5n+3} - \frac{1}{5n+4}\right) + 4\left(\frac{1}{5n+4} - \frac{1}{5n+5}\right) \\
&= H_{5n} - H_n + \frac{1}{5n+1} + \frac{1}{5n+2} + \frac{1}{5n+3} + \frac{1}{5n+4} + \frac{1}{5n+5} - \frac{1}{n+1} = H_{5n+5} - H_{n+1}
\end{aligned}$$

donc la récurrence se propage.

On en déduit que $S_{5n} = \ln(5n) + \gamma - \ln(n) - \gamma + o(1) = \ln(5) + o(1)$ donc $\lim S_{5n} = \ln 5$, et puisque la suite (S_n) converge, $\lim S_n = \ln 5$.

Exercice 6 [Centrale PC 2016]

Soient $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$, $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$ et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, e^{-xt}\,dt$.

a. Justifier la définition de I et de J, puis montrer que I = J.

b. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. En déduire la valeur de I.

a. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt$ est faussement impropre et $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,dt$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $\left|\dfrac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \cos 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$. Ceci prouve que l'intégrale I est convergente.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^2 t}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0 et est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $\left|\dfrac{\sin^2 t}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$. Cette fonction est donc intégrable sur $]0, +\infty[$ et l'intégrale J converge.

Une intégration par parties donne : $\displaystyle\int_x^y \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_x^y + \int_x^y \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$. On poursuit avec le changement de variable $t = 2u$: $\displaystyle\int_x^y \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_x^y + \int_{x/2}^{y/2} \frac{1-\cos(2u)}{2u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_x^y + \int_{x/2}^{y/2} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,\mathrm{d}u$.
En faisant alors tendre x vers 0 et y vers $+\infty$ on obtient $\mathrm{I} = \mathrm{J}$.

b. Le théorème de continuité (fonction majorante $\phi(t) = \dfrac{\sin^2 t}{t^2}$) permet de montrer que g est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, car il a été montré à la question précédente que ϕ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
Posons $h : (x,t) \mapsto \dfrac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}$. La fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{\sin^2 t}{t}\mathrm{e}^{-xt}$, $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = \sin^2 t\,\mathrm{e}^{-xt}$.
Soit $a > 0$. Sur $[a,+\infty[$ on a $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-at}$ et $\left|\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-xt}$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ donc on peut appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre qui prouve que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,+\infty[$, puis sur $\mathbb{R}_+^*$ par recouvrement.

c. Pour tout $x > 0$, $g''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin^2 t\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{2}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \cos(2t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.
Deux intégrations par parties successives conduisent à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(2t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{x}{x^2+4}$ donc $g''(x) = \dfrac{2}{x(x^2+4)}$.
On a $g''(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+4}\right)$ donc il existe $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que $g'(x) = \dfrac{1}{2}\ln x - \dfrac{1}{4}\ln(x^2+4) + \mathrm{C}$.
À l'aide du théorème de convergence dominée on prouve sans peine que $\lim\limits_{+\infty} g'(x) = 0$, ce qui impose $\mathrm{C} = 0$.
On en déduit qu'il exixte une constante K telle que $g(x) = \dfrac{1}{2}x\ln x - \dfrac{1}{4}x\ln(x^2+4) - \arctan(x/2) + \mathrm{K}$.
De même, on prouve que $\lim\limits_{+\infty} g(x) = 0$, ce qui impose $\mathrm{K} = \dfrac{\pi}{2}$.
Enfin, g étant continue en 0, on en déduit que $\mathrm{J} = g(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 7 [Mines PSI 2016]

Une urne contient $n \geqslant 2$ boules distinctes $\mathrm{B}_1,\dots,\mathrm{B}_n$, que l'on tire successivement avec remise. Soit Y_r la variable aléatoire qui donne le rang du tirage au bout duquel $\mathrm{B}_1,\dots,\mathrm{B}_r$ ont été tirées au moins une fois.

a. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_1.

b. Préciser $\mathrm{Y}_r(\Omega)$. Que valent $\mathrm{P}(\mathrm{Y}_r = r)$ et $\mathrm{P}(\mathrm{Y}_r = r+1)$?

c. On fixe r. Pour tout $i \in [\![1,r]\!]$ on note W_i la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour que, la première fois, i boules distinctes parmi les boules $\mathrm{B}_1,\dots,\mathrm{B}_r$ soient sorties (ainsi, $\mathrm{W}_r = \mathrm{Y}_r$). On pose $\mathrm{X}_1 = \mathrm{W}_1$ et $\mathrm{X}_i = \mathrm{W}_i - \mathrm{W}_{i-1}$ si $i \geqslant 2$.
Déterminer la loi de X_i ainsi que son espérance.

d. En déduire l'espérance de Y_n. Trouver un équivalent de $\mathrm{E}(\mathrm{Y}_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

a. Y_1 suit une loi géométrique de paramètre $p = 1/n$ donc $\mathrm{E}(\mathrm{Y}_1) = \dfrac{1}{p} = n$ et $\mathrm{V}(\mathrm{Y}_1) = \dfrac{q}{p^2} = n(n-1)$.

b. $\mathrm{Y}_r(\Omega) = [\![r,+\infty[\![\cup \{+\infty\}$. Par dénombrement a $\mathrm{P}(\mathrm{Y}_r = r) = \dfrac{r!}{n^r}$.
Si $\mathrm{Y}_r = r+1$, deux cas sont possibles : ou bien une des boules $\mathrm{B}_1,\dots,\mathrm{B}_r$ a été tirée deux fois, ou bien une des boules $\mathrm{B}_{r+1},\dots,\mathrm{B}_n$ a été tirée. Dans le premier cas il y a $\dbinom{r}{2}r!$ tirages possibles ; dans le second cas, $(n-r)r.r!$. On en déduit $\mathrm{P}(\mathrm{Y}_r = r+1) = \dfrac{r!r(2n-r-1)}{2n^{r+1}}$.

c. X_1 suit une loi géométrique de paramètre $p = r/n$ donc $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1) = \dfrac{n}{r}$.

Si $i \in [\![2, r]\!]$, X_i suit une loi géométrique de paramètre $p = (r-i+1)/n$ donc $E(X_i) = \dfrac{n}{r-i+1}$.

d. On a $Y_r = W_r = \sum_{i=1}^{r} X_i$ donc par linéarité de l'espérance, $E(Y_r) = \sum_{i=1}^{r} \dfrac{n}{r-i+1} = n \sum_{k=1}^{r} \dfrac{1}{k}$.

En particulier, $E(Y_n) = n \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \sim n \ln n$ (comparaison à une intégrale).

Exercice 8 [X PC 2020]

Soit $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^{2n}$, et $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \\ a_1 & \cdots & a_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice M soit diagonalisable.

On calcule par récurrence le polynôme caractéristique pour obtenir : $\chi_M(x) = x^{n-1}\left(x^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)$.

- Si $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 0$ alors $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$ donc M est diagonalisable si et seulement si $M = 0$, soit $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = (0, \dots, 0)$.
- Si $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \Omega \neq 0$, soit ω une des deux racines complexes de Ω. Alors $\mathrm{Sp}(M) = \{0, \omega, -\omega\}$. ω et $-\omega$ sont racines simples donc les sous-espaces propres associés sont de dimension 1. M est donc diagonalisable si et seulement si $\dim \mathrm{Ker}\, M = n-1$ soit $\mathrm{rg}\, M = 2$, ce qui est le cas puisqu'il existe nécessairement $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_i \neq 0$.

En conclusion, M est diagonalisable si et seulement si $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) = (0, \dots, 0)$ ou $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \neq 0$.