

RAPPORT : POINTS FIXES ET FONCTIONS CONTRACTANTES (X PC 2022)

Commentaires généraux

Le sujet de l'épreuve portait sur l'existence et les diverses propriétés des points fixes des applications réelles et sur la justification de la méthode de la sécante. La première partie traitait des applications lipschitziennes contractantes définies sur des ensembles fermés. La deuxième partie était consacrée au cas bidimensionnel et introduisait les matrices contractantes avec leurs normes associées. La troisième partie abordait le cas de certaines applications spéciales à deux variables, leurs représentations intégrales et leur régularité. La quatrième partie introduisait la méthode de la sécante et examinait les propriétés de convergence.

Le sujet de cette année était facile mais assez long. Dans l'ensemble, quasiment aucune question ne demandait des arguments vraiment très élaborés. Il fallait surtout ne pas perdre trop de temps sur les questions faciles et être capable d'avancer dans le sujet. Rappelons que le candidat a grand intérêt à lire le sujet intégralement avant de commencer à le traiter et à faire preuve de perspicacité pendant cette lecture.

Il est regrettable qu'une partie non négligeable des candidats fassent preuve d'un manque de rigueur sur des questions élémentaires comme des calculs algébriques, des raisonnements par récurrence simples, l'application de l'inégalité triangulaire... Les erreurs de raisonnement dans les premières questions révèlent des lacunes profondes dans le niveau des candidats : utilisation du théorème des valeurs intermédiaires, écriture des inégalités dans le bon sens, confusion entre suites et séries, distinction entre les différents types de convergence pour les séries... Les candidats n'arrivent pas toujours à identifier le type de problème à chaque question (e.g. intégrales à paramètres). Par conséquent, certaines copies avec des notes « correctes » (entre 9 et 14) contiennent des erreurs de raisonnement qu'on aurait pu considérer comme éliminatoires. Parmi ces mêmes copies, beaucoup de candidats ont l'air de ne pas comprendre les objets qu'ils manipulent mais arrivent à glaner des points en répondant aux questions en effectuant à peu près les manipulations algébriques demandées.

Les correcteurs ont apprécié les efforts faits par une grande partie des candidats dans leur rédaction. Il faut maintenir celui-ci en continuant non seulement à énoncer entièrement les théorèmes mais en vérifiant aussi toutes leurs hypothèses. Il faut également être clair et précis dans sa rédaction et ne pas omettre de quantificateurs aux passages cruciaux des démonstrations. Entre autres, il est important de bien mettre en évidence les points clés d'une démonstration (nom d'un théorème, hypothèse importante utilisée, etc), en les entourant par exemple. C'est plus important que d'entourer la solution elle-même (que le correcteur connaît, voire qui est donnée dans le sujet) et cela détermine pour le correcteur la compréhension ou non de la question par le candidat. Dans le même ordre d'idée, lorsque les candidats utilisent les résultats des questions précédentes, il faut absolument les mentionner proprement.

Concernant la présentation des copies, le nombre de copies très mal écrites, est heureusement en diminution. Il faut absolument que les candidats aient en mémoire que la copie est un endroit où l'on rend un résultat propre, abouti, réfléchi et rédigé. Ce n'est pas une feuille de brouillon ! Nous avons encore tenu compte cette année de la présentation dans la notation.

Concernant la stratégie, c'est en faisant avec soin les questions un peu difficiles, celles qui demandent un peu de travail, de réflexion ou de calcul, que l'on gagne réellement des points, pas en survolant toutes les questions et en répondant à toutes celles qui sont faciles. On peut dire sans exagérer qu'environ 75 % des candidats font le même lot de questions, avec plus ou moins de bonheur. Les candidats qui font vraiment la différence sont ceux qui font deux ou trois questions plus difficiles, plus longues, où il y a un raisonnement en 2 ou 3 étapes à faire. Par ailleurs, il est également stratégiquement intéressant de répondre correctement et avec soin, sans les bâcler, aux premières questions du sujet.

Notons que la qualité de la rédaction et de la présentation était notée sur 2,3 points. Voyons maintenant les détails pour chaque question.

Première Partie

Cette première partie, si elle était entièrement et correctement traitée, pouvait rapporter 3.6 points.

1. Beaucoup de candidats ont eu l'idée d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires mais souvent de manière maladroite.
2. La plupart des candidats se contentent de montrer que l'application donnée en indication est injective sans montrer correctement qu'elle s'annule.

3. L'inégalité demandée était facile à démontrer, malheureusement celle-ci a été abordée de manière trop compliquée. À noter que bon nombre de candidats ont fait cette question sans faire le lien avec les questions précédentes.
- 4.a) Question très simple. Peu de candidats ont su reconnaître une série télescopique. Beaucoup de confusion chez les candidats entre la convergence de la norme d'une suite et de la suite elle-même.
- 4.b) Pour résoudre cette question, il suffisait d'utiliser l'inégalité triangulaire et les sommes télescopiques.
- 5.a) Très peu de candidats ont su remarquer le lien avec la question 4.a). La caractérisation séquentielle des fermés est rarement utilisée. Beaucoup de candidats ont utilisé de manière indue une « sorte de Bolzano-Weierstrass ».
- 5.b) Le passage à la limite a généralement été fait sans mentionner la continuité de la fonction. Une majorité de candidats a faussement conclu à l'unicité du point fixe à partir de l'unicité de la limite.
- 5.c) Question réussie par la majorité des candidats mais souvent la démonstration est basée sur une récurrence immédiate; très peu de candidats proposent une preuve complète.
- 5.d) L'unicité a été bien démontrée dans la majorité des cas. L'existence par contre est rarement abordée.
6. Une poignée de candidats ont réussi cette question.

Deuxième Partie

Cette deuxième partie, si elle était entièrement et correctement traitée, pouvait rapporter 4.9 points.

1. Aucune difficulté pour cette question algébrique.
- 2.a) Le résultat se déduit directement de la question précédente en utilisant proprement l'inégalité triangulaire. Néanmoins beaucoup de candidats ont eu du mal à obtenir les inégalités demandées.
- 2.b) Une nouvelle fois, beaucoup d'erreurs dans l'application de l'inégalité triangulaire.
- 3.a) Question facile si on utilise bien les inégalités précédentes.
- 3.b) Cette question n'a pas posé de problème.
- 3.c) La double inégalité demandée a été démontrée par un grand nombre de candidats.
- 4.a) La première partie de cette question (norme) a été résolue que par un grand nombre de candidats. Néanmoins, l'inégalité demandée a rarement été démontrée.
- 4.b) Une petite fraction des candidats a réussi à trouver un contre-exemple.
5. Cette question était plus difficile et n'a été abordée que par une infime portion de candidats.

Troisième Partie

Cette troisième partie, si elle était entièrement et correctement traitée, pouvait rapporter 4.1 points.

- 1.a) Question facile qui nécessitait une simple intégration.
- 1.b) Une infime quantité de candidats ont su appliquer la formule de la moyenne.
2. La première partie de la question (bijectivité) a été réussie par une majorité de candidats, même si le fait que $f(I)$ soit un ouvert a rarement été justifié.
- 3.a) Question facile qui nécessitait un calcul intégral simple.
- 3.b) Seule une poignée de candidats ont remarqué que la question portait sur la continuité d'intégrales à paramètres et qu'il fallait appliquer le théorème de convergence dominée. La plupart ont écrit des raisonnements naïfs du type composition d'opérations qui respectent la continuité.
- 3.c) Idem question précédente.
- 3.d) Cette question présentait peu de difficulté et a été peu traitée.
- 4.a) Il suffisait d'utiliser proprement la question 1.b). Beaucoup de candidats l'ont remarqué sans néanmoins étudier tous les cas possibles.
- 4.b) Cette question, basée sur un calcul simple, n'a été résolue que par une poignée de candidats.

Quatrième partie

Cette quatrième partie, si elle était entièrement et correctement traitée, pouvait rapporter 5.1 points.

1. La première partie de question (illustration) a été bien traitée. La deuxième partie de la question a très peu été abordée même si elle ne présentait pas de difficulté.
- 2.a) Trop peu de candidats ont réussi à résoudre proprement cette question.
- 2.b) Cette question plus difficile n'a pas été abordée par les candidats.
- 2.c) Même remarque que pour la question précédente. Il fallait avoir résolu 2.b) pour pouvoir répondre à cette question.
- 2.d) Même remarque qu'à la question précédente.
- 3.a) Une très petite partie des candidats ont proposé une solution correcte à cette question.
- 3.b) Quelques candidats ont utilisé les résultats des questions IV.1. et III.4.a) pour obtenir l'inégalité demandée.
- 3.c) Cette question reposait sur deux récurrences simples à partir du résultat de la question précédente. Malheureusement, seulement quelques candidats ont traité cette dernière question.