

POINTS FIXES ET FONCTIONS CONTRACTANTES (X PC 2022)

Durée : libre

Notations

- Si z est un nombre complexe on note $|z|$ son module.
- Si ℓ est un entier strictement positif, on munit l'espace vectoriel \mathbb{C}^ℓ de la norme définie par

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{\ell} |x_j|^2}$$

pour $x = (x_1, \dots, x_\ell)$.

- On note $\mathcal{M}_\ell(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de taille $\ell \times \ell$ à coefficients complexes.
- Si $A \in \mathcal{M}_\ell(\mathbb{C})$, on désigne par $\sigma(A)$ (le spectre de A) l'ensemble des valeurs propres complexes de A , et

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$$

le rayon spectral de A .

- Étant donné un ensemble E , un point fixe d'une application $\phi : E \rightarrow E$ est un élément x de E tel que $\phi(x) = x$.

Les trois premières parties sont mutuellement indépendantes. La quatrième partie utilise des résultats établis dans la troisième.

Première Partie. Points fixes

1. Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de \mathbb{R} . Si $\phi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ est continue, montrer que ϕ possède au moins un point fixe.
2. Si $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 et vérifie

$$(1) \quad \sup\{|\phi'(x)| \mid x \in \mathbb{R}\} < 1,$$

montrer que ϕ possède au moins un point fixe (on pourra étudier le signe de $x - \phi(x)$ pour $|x|$ assez grand). Montrer que ce point fixe est unique.

3. Au moyen de la fonction $\psi(x) = \sqrt{1+x^2}$, montrer que dans la question précédente l'hypothèse (1) ne peut pas être remplacée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\phi'(x)| < 1.$$

4. Soit ℓ un entier strictement positif. On se donne une suite $(v_n)_{n \geq 0}$ de vecteurs dans \mathbb{R}^ℓ telle que la série $\sum_n \|v_{n+1} - v_n\|$ converge.

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

b) Notons v^* la limite de cette suite. Majorer $\|v_n - v^*\|$ au moyen d'un reste de la somme de la série $\sum_n \|v_{n+1} - v_n\|$.

5. Soit ℓ un entier strictement positif. Soit F une partie fermée de \mathbb{R}^ℓ et soit $\phi : F \rightarrow F$ une application. On suppose qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que

$$\forall x \in F, \quad \forall y \in F, \quad \|\phi(y) - \phi(x)\| \leq k\|y - x\|.$$

a) On choisit un point $x_0 \in F$. Montrer que la formule $x_{n+1} = \phi(x_n)$ définit une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de F , et que cette suite est convergente dans F .

b) En déduire que ϕ possède un unique point fixe dans F .

c) Ce point fixe étant noté x^* , majorer $\|x_n - x^*\|$ en fonction de $\|x_0 - x^*\|$.

d) Dans ce qui précède, on suppose que

$$\phi = \underbrace{\theta \circ \dots \circ \theta}_{m \text{ fois}},$$

où $\theta : F \rightarrow F$ est une application et $m \geq 2$ est un entier. Montrer que θ possède un point fixe, et un seul, dans F .

6. Soit $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction croissante (mais pas nécessairement continue). Montrer que g possède au moins un point fixe. *Indication : on pourra considérer l'ensemble*

$$E = \{x \in [0, 1] \mid x \leq g(x)\}.$$

Deuxième Partie. Matrices contractantes

1. Pour une matrice triangulaire $T = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ calculer explicitement les puissances successives T^n pour n entier strictement positif.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice et soit $\epsilon > 0$ un nombre réel.
- a) Montrer l'existence d'un nombre réel $\alpha > 0$ tel que pour tout entier positif n les valeurs absolues des coefficients de A^n soient majorées par $\alpha(\rho(A) + \epsilon)^n$.

b) En déduire l'existence d'un nombre réel $\beta > 0$ tel que pour tout entier positif n et tout $x \in \mathbb{C}^2$ on ait

$$\|A^n x\| \leq \beta(\rho(A) + \epsilon)^n \|x\|.$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice et soit η un nombre réel strictement positif.

a) Pour $x \in \mathbb{C}^2$, montrer que la série

$$\sum_n (\rho(A) + \eta)^{-n} \|A^n x\|$$

est convergente.

On note

$$N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\rho(A) + \eta)^{-n} \|A^n x\|$$

la somme de cette série.

b) Montrer que $x \mapsto N(x)$ est une norme sur \mathbb{C}^2 , qui satisfait l'inégalité suivante

$$\forall x \in \mathbb{C}^2, \quad N(Ax) \leq (\rho(A) + \eta)N(x),$$

c) Montrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{C}^2$ on ait

$$\|x\| \leq N(x) \leq C\|x\|.$$

4. a) Si $B \in \mathcal{M}_\ell(\mathbb{C})$ est diagonalisable, montrer qu'il existe une norme $\|\cdot\|_B$ sur \mathbb{C}^ℓ telle que $\|Bx\|_B \leq \rho(B)\|x\|_B$ pour tout $x \in \mathbb{C}^\ell$. *Indication : on pourra vérifier que si $P \in \mathcal{GL}_\ell(\mathbb{C})$, alors $x \mapsto \|Px\|$ est une norme sur \mathbb{C}^ℓ .*

b) Montrer qu'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que, pour toute norme N sur \mathbb{C}^2 il existe $y \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$N(Cy) > \rho(C)N(y).$$

5. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application et soit x^* un point fixe de ϕ . Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant $\rho(A) < 1$, et soit $M > 0$ un nombre réel. On suppose que ϕ satisfait

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \|\phi(x) - \phi(x^*) - A(x - x^*)\| \leq M\|x - x^*\|^2.$$

Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant $\|x_0 - x^*\| < \epsilon$, la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par $x_{n+1} = \phi(x_n)$ (pour $n \geq 0$) converge vers x^* quand $n \rightarrow +\infty$.

Troisième Partie. Fonctions de deux variables réelles

1. Soient a, b, c, d quatre nombres réels tels que $a \leq b$ et $c \leq d$. Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 contenant $[a, b] \times [c, d]$. Soit $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 .

a) Montrer l'identité

$$h(b, d) - h(a, d) - h(b, c) + h(a, c) = \int_a^b \hat{h}(s_1) ds_1,$$

où \hat{h} est définie par

$$\hat{h}(s_1) = \int_c^d \frac{\partial^2 h}{\partial s_1 \partial s_2}(s_1, s_2) ds_2.$$

b) En déduire qu'il existe un point (\bar{s}_1, \bar{s}_2) de $[a, b] \times [c, d]$ tel qu'on ait les deux égalités

$$h(b, d) - h(a, d) - h(b, c) + h(a, c) = (b - a)\hat{h}(\bar{s}_1) = (b - a)(d - c) \frac{\partial^2 h}{\partial s_1 \partial s_2}(\bar{s}_1, \bar{s}_2).$$

2. Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . On se donne une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^3 , telle que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Montrer que f est bijective de I sur l'intervalle ouvert $f(I)$.

On note $g : f(I) \rightarrow I$ sa fonction réciproque. Rappeler la valeur de $g'(f(x))$. Exprimer $g''(f(x))$ en fonction des dérivées successives de f en x .

3. On conserve, jusqu'à la fin de cette troisième partie, les hypothèses et la notation de la question précédente. Pour $x, y \in I$ tels que $y \neq x$, on pose

$$H_f(x, y) = \frac{xf(y) - yf(x)}{f(y) - f(x)}.$$

a) Montrer que pour tous $x, y \in I$ tels que $y \neq x$ on a

$$H_f(x, y) = x - f(x) \int_0^1 g'(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)) d\lambda.$$

b) En déduire que H_f admet un unique prolongement par continuité à $I \times I$ tout entier. On note encore ce prolongement $H_f : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$.

c) Montrer que H_f est de classe \mathcal{C}^2 sur $I \times I$.

d) Calculer $H_f(x, x)$.

4. On suppose maintenant $0 \in f(I)$ et on note $x^* = g(0)$. Pour $x \in I$ on note I_x l'intervalle fermé d'extrémités x et x^* .

a) Soient $x, y \in I$. Montrer qu'il existe $(\bar{x}, \bar{y}) \in I_x \times I_y$, tel que

$$H_f(x, y) - x^* = (x - x^*)(y - x^*) \frac{\partial^2 H_f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y}).$$

b) Calculer

$$\frac{\partial^2 H_f}{\partial x \partial y}(x^*, x^*)$$

en fonction des dérivées de f .

Quatrième Partie. Méthode de la sécante

Soit I un intervalle ouvert, borné ou non, de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^3 . On désire calculer une approximation d'une solution de l'équation $f(x) = 0$. Pour cela on met en œuvre un procédé itératif appelé *méthode de la sécante*. En voici le principe :

Initialisation. On choisit deux nombres réels $x_0, x_1 \in I$.

Itération. Soit $n \geq 1$. On suppose que les valeurs x_k sont bien définies pour $1 \leq k \leq n$. On considère la droite L_n passant par les points $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ et $(x_n, f(x_n))$ du plan \mathbb{R}^2 , avec la convention que L_n est la tangente en $(x_n, f(x_n))$ au graphe de f lorsque $x_n = x_{n-1}$. Si L_n intersecte l'ensemble $\{(x, 0) \mid x \in I\}$ en un unique point $(x, 0)$ on définit $x_{n+1} = x$ et on poursuit les itérations. Sinon on considère que la méthode a échoué et on arrête l'itération.

1. Illustrer la construction ci-dessus au moyen d'une figure. Lorsque $f' > 0$ sur I , exprimer x_{n+1} en fonction de x_{n-1}, x_n au moyen de la fonction H_f définie dans la question 3 de la troisième partie.

2. Dans cette question, on examine le cas particulier d'une fonction polynomiale du second degré f définie par la formule $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$ où α et β sont réels et $\alpha > \beta$. On prend $I =](\alpha + \beta)/2, +\infty[$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ on définit $h(x) = \frac{x - \alpha}{x - \beta}$, avec la convention $h(\beta) = \infty$.

a) Pour $x \in \mathbb{R}$ montrer qu'on a $|h(x)| < 1$ si et seulement si $x \in I$.

b) Expliciter la relation de récurrence satisfaite par la suite $u_n = h(x_n)$ et en déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est bien définie quels que soient x_0 et x_1 dans I .

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ tend vers 0 et en déduire que $(x_n)_{n \geq 0}$ tend vers α .

d) Soit $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Montrer qu'il existe un nombre réel strictement négatif s tel que

$$x_n - \alpha = O(e^{s\phi^n}).$$

3. On revient au cas général, f étant une fonction quelconque de classe \mathcal{C}^3 . On suppose que f s'annule en un point $x^* \in I$, pour lequel $f'(x^*) > 0$.

a) Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $[x^* - \epsilon, x^* + \epsilon] \subset I$ et $f' > 0$ sur l'intervalle $[x^* - \epsilon, x^* + \epsilon]$. On fixe un tel ϵ pour la suite et on définit

$$M = \sup_{(x,y) \in [x^* - \epsilon, x^* + \epsilon]^2} \left| \frac{\partial^2 H_f}{\partial x \partial y}(x, y) \right|.$$

b) On suppose que $x_{n-1}, x_n \in [x^* - \epsilon, x^* + \epsilon]$. Montrer que

$$|x_{n+1} - x^*| \leq M |x_{n-1} - x^*| \cdot |x_n - x^*|.$$

c) On fixe $\epsilon' \in]0, \epsilon]$ tel que $M\epsilon' < 1$. Montrer que si x_0, x_1 appartiennent à $[x^* - \epsilon', x^* + \epsilon']$ alors la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ est bien définie et converge vers x^* .