Corrigé : points fixes et fonctions contractantes (X PC 2022)

Première partie. Points fixes

1. Considérons la fonction $f : x \mapsto x - \phi(x)$. f est continue et $f(a) = a - \phi(a) \leqslant 0$, $f(b) = b - \phi(b) \geqslant 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$, soit $\phi(c) = c$.

2. Posons $\alpha = \|\phi'\|_\infty$ et considérons de nouveau la fonction $f : x \mapsto x - \phi(x)$. f est cette fois de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = 1 - \phi'(t) \geqslant 1 - \alpha$.
Pour tout $x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x \phi'(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^x (1-\alpha)\,\mathrm{d}t$ donc $f(x) \geqslant f(0) + (1-\alpha)x$, et puisque $1 - \alpha > 0$, $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$.
Pour tout $x \leqslant 0$, $\displaystyle\int_x^0 \phi'(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^0 (1-\alpha)\,\mathrm{d}t$ donc $f(x) \leqslant f(0) + (1-\alpha)x$, et puisque $1 - \alpha > 0$, $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$.
f étant continue on en déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$, soit $\phi(c) = c$.

Supposons maintenant l'existence d'un autre point fixe $d \in \mathbb{R}$.
D'après l'inégalité des accroissements finis, $|f(d) - f(c)| \leqslant \alpha|d - c|$ ce qui donne ici $|d - c| \leqslant \alpha|d - c|$, et puisque $\alpha < 1$ on a nécessairement $|d - c| = 0$, ce qui prouve l'unicité du point fixe.

3. ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ donc $|\psi'(x)| < 1$. Cependant, la fonction ψ n'a pas de point fixe car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| < \psi(x)$. L'hypothèse : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\phi'(x)| < 1$ est donc insuffisante pour assurer l'existence d'un point fixe.

4. *a)* Pour tout $k \in [\![1,\ell]\!]$, notons $v_n^{(k)}$ la k^{e} composante du vecteur v_n dans la base canonique de $\mathbb{R}^\ell$. Puisque toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, la série $\sum \|v_{n+1} - v_n\|_\infty$ converge. Or $|v_{n+1}^{(k)} - v_n^{(k)}| \leqslant \|v_{n+1} - v_n\|_\infty$ donc pour tout $k \in [\![1,\ell]\!]$, la série numérique $\sum (v_{n+1}^{(k)} - v_n^{(k)})$ converge. Par télescopage on en déduit que la suite numérique $(v_n^{(k)})_n$ converge, et ceci étant vrai pour tout $k \in [\![1,\ell]\!]$ on peut en conclure que la suite vectorielle $(v_n)_n$ converge.

b) Pour tout $\mathrm{N} \geqslant n$, $v_\mathrm{N} - v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{\mathrm{N}-1} (v_{k+1} - v_k)$ donc $\|v_\mathrm{N} - v_n\| \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \|v_{k+1} - v_k\|$. Une norme est continue (car 1-lipschitzienne) donc en faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient $\|v^* - v_n\| \leqslant \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \|v_{k+1} - v_k\|$.

5. *a)* Puisque F est stable par ϕ, la relation $x_{n+1} = \phi(x_n)$ définit la suite $x_n = \phi^n(x)$ de F dès lors que $x_0 \in \mathrm{F}$.
Pour tout $n \geqslant 1$, $\|x_{n+1} - x_n\| = \|\phi(x_n) - \phi(x_{n-1})\| \leqslant k\|x_n - x_{n-1}\|$, ce qui permet de prouver par récurrence que $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant k^n\|x_1 - x_0\|$ et donc que $\|x_{n+1} - x_n\| = \mathrm{O}(k^n)$.
La série $\sum k^n$ converge car $k < 1$ donc il en est de même de la série $\sum \|x_{n+1} - x_n\|$, et d'après la question 4.a, ceci prouve que la suite vectorielle (x_n) converge vers une limite x^*, limite qui appartient à F puisque F est un fermé.

b) La fonction ϕ est continue car lipschitzienne donc en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation $x_{n+1} = \phi(x_n)$ on obtient $x^* = \phi(x^*)$, ce qui montre que x^* est un point fixe de ϕ.
Supposons que ϕ possède un autre point fixe c. Alors $\|\phi(x^*) - \phi(c)\| \leqslant k\|x^* - c\|$ s'écrit aussi $\|x^* - c\| \leqslant k\|x^* - c\|$, et puisque $k < 1$ ceci impose $\|x^* - c\| = 0$, soit $c = x^*$. Ce point fixe x^* est donc unique.

c) Pour tout $n \geqslant 1$, $\|x^* - x_n\| = \|\phi(x^*) - \phi(x_{n-1})\| \leqslant k\|x^* - x_{n-1}\|$, ce qui permet de prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x^* - x_n\| \leqslant k^n\|x^* - x_0\|$.

d) On a $\theta^m(x^*) = \phi(x^*) = x^*$ donc $\theta^{m+1}(x^*) = \theta(x^*)$. Mais $\theta^{m+1}(x^*) = \phi(\theta^*(x))$ donc $\theta(x^*)$ est point fixe de ϕ, et par unicité de ce dernier, $\theta(x^*) = x^*$. Le vecteur x^* est donc point fixe de θ.
Enfin, si θ possédait un autre point fixe, ce dernier serait aussi point fixe de ϕ, et donc égal à x^*. Ce vecteur est donc l'unique point fixe de θ.

6. Considérons l'ensemble $\mathrm{E} = \left\{x \in [0,1] \;\middle|\; x \leqslant g(x)\right\}$. Cet ensemble est non vide (il contient 0) et majoré (par 1) donc possède une borne supérieure $c \in [0,1]$.
Supposons $c < 1$. Pour n assez grand on a $c + \dfrac{1}{n} < 1$ et alors $c + \dfrac{1}{n} \notin \mathrm{E}$, soit $c + \dfrac{1}{n} \geqslant g\Big(c + \dfrac{1}{n}\Big)$. Puisque g est croissante on en déduit que $c + \dfrac{1}{n} \geqslant g(c)$, et par passage à la limite que $c \geqslant g(c)$.

Supposons $c > 0$. Pour n assez grand on a $0 < c - \dfrac{1}{n}$ et alors il existe $x_n \in \mathrm{E}$ tel que $c - \dfrac{1}{n} \leqslant x_n \leqslant c$. Par croissance de g on en déduit que $g(x_n) \leqslant g(c)$, et puisque $x_n \in \mathrm{E}$, que $g(x_n) \geqslant x_n$. Ceci prouve que $c - \dfrac{1}{n} \leqslant g(c)$, puis par passage à la limite que $c \leqslant g(c)$.

- Si $c \in]0,1[$ on a prouvé que $g(c) \leqslant c$ et $g(c) \geqslant c$ donc $g(c) = c$;
- si $c = 1$ on a prouvé que $g(1) \geqslant 1$, mais puisque g est à valeurs dans $[0,1]$, $g(1) = 1$;
- si $c = 0$ on a prouvé que $g(0) \leqslant 0$, mais puisque g est à valeurs dans $[0,1]$, $g(0) = 0$.

Dans tous les cas, g possède bien au moins un point fixe.

Deuxième partie. Matrices contractantes

1. T est triangulaire donc on sait que T^n aura pour forme $\mathrm{T}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & u_n \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}$, et il nous reste à déterminer u_n. On a $u_1 = a$ et le calcul de $\mathrm{T}^{n+1} = \mathrm{T} \times \mathrm{T}^n$ fournit la relation de récurrence : $u_{n+1} = \lambda u_n + a\mu^n$. Le calcul des premières valeurs de cette suite nous permet de postuler que $u_n = a \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \mu^{n-1-k}$, ce qui se prouve sans peine par récurrence.

2. *a)* Toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est trigonalisable donc il existe une matrice $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et une matrice $\mathrm{P} \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{PTP}^{-1}$. On a ainsi $\mathrm{A}^n = \mathrm{PT}^n\mathrm{P}^{-1}$.
En développant ce produit matriciel, on constate que chacun des quatre coefficients de $\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} \\ a_{21}^{(n)} & a_{22}^{(n)} \end{pmatrix}$ s'écrit sous la forme suivante :

$$a_{ij}^{(n)} = p_{ij}\lambda^n + q_{ij}\mu^n + r_{ij} a \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \mu^{n-1-k}$$

Sachant que $\rho(\mathrm{A}) = \max(|\lambda|, |\mu|)$ on en déduit : $|a_{ij}^{(n)}| \leqslant |p_{ij}|\rho(\mathrm{A})^n + |q_{ij}|\rho(\mathrm{A})^n + |r_{ij}a| n\rho(\mathrm{A})^{n-1}$ et donc que pour tout $\epsilon > 0$, $|a_{ij}^{(n)}| \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{O}\big((\rho(\mathrm{A}) + \epsilon)^n\big)$. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que les quatre coefficients de A^n soient majorés par $\alpha(\rho(\mathrm{A}) + \epsilon)^n$.

b) Posons $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Alors $\|\mathrm{A}^n x\| = \sqrt{\big(a_{11}^{(n)}x_1 + a_{12}^{(n)}x_2\big)^2 + \big(a_{21}^{(n)}x_1 + a_{22}^{(n)}x_2\big)^2} \leqslant \alpha(\rho(\mathrm{A}) + \epsilon)^n \sqrt{\big(|x_1| + |x_2|\big)^2 + \big(|x_1| + |x_2|\big)^2}$.
Sachant que $|x_1| \leqslant \|x\|$ et $|x_2| \leqslant \|x\|$ on en déduit que $\|\mathrm{A}^n x\| \leqslant 2\sqrt{2}\alpha(\rho(\mathrm{A}) + \epsilon)^n = \beta(\rho(\mathrm{A}) + \epsilon)^n$.

3. *a)* Soit $\eta > 0$. D'après la question précédente, pour tout $\epsilon > 0$ on a $(\rho(\mathrm{A}) + \eta)^{-n}\|\mathrm{A}^n x\| \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{O}\bigg(\Big(\dfrac{\rho(\mathrm{A}) + \epsilon}{\rho(\mathrm{A}) + \eta}\Big)^n\bigg)$ donc en choisissant ϵ de sorte que $0 < \epsilon < \eta$ la série géométrique $\sum \Big(\dfrac{\rho(\mathrm{A}) + \epsilon}{\rho(\mathrm{A}) + \eta}\Big)^n$ converge et par conséquence $\sum (\rho(\mathrm{A}) + \eta)^{-n}\|\mathrm{A}^n x\|$ aussi.

b) Pour tout $x \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\mathrm{A}^n(\lambda x)\| = |\lambda|\|\mathrm{A}^n x\|$ et en sommant : $\mathrm{N}(\lambda x) = |\lambda|\mathrm{N}(x)$.
Pour tout $x, y \in \mathbb{C}^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\mathrm{A}^n(x + y)\| \leqslant \|\mathrm{A}^n x\| + \|\mathrm{A}^n y\|$ et en sommant : $\mathrm{N}(x + y) \leqslant \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$.
Enfin, si $\mathrm{N}(x) = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\mathrm{A}^n x\| = 0$ et en particulier pour $n = 0$: $\|x\| = 0$, soit $x = 0$.
N est bien une norme sur $\mathbb{C}^2$.
En outre, $\mathrm{N}(\mathrm{A}x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\rho(\mathrm{A}) + \eta)^{-n}\|\mathrm{A}^{n+1}x\| = \sum_{n=1}^{\infty} (\rho(\mathrm{A}) + \eta)^{1-n}\|\mathrm{A}^n x\| = (\rho(\mathrm{A}) + \eta)\big(\mathrm{N}(x) - \|x\|\big) \leqslant (\rho(\mathrm{A}) + \eta)\mathrm{N}(x)$.

c) Le premier terme de la série positive définissant $\mathrm{N}(x)$ est égal à $\|x\|$ donc $\|x\| \leqslant \mathrm{N}(x)$. En outre, toutes les normes étant équivalentes sur $\mathbb{C}^2$ (car il est de dimension finie), il existe $\mathrm{C} > 0$ tel que $\mathrm{N}(x) \leqslant \mathrm{C}\|x\|$.

4. *a)* B est diagonalisable donc il existe $\mathrm{P} \in \mathcal{M}_\ell(\mathbb{C})$ et $\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_\ell)$ tel que $\mathrm{B} = \mathrm{PDP}^{-1}$. Posons alors $\|x\|_\mathrm{B} = \|\mathrm{P}^{-1}x\|$. Il est facile de constater qu'il s'agit d'une norme :

- $\|\lambda x\|_\mathrm{B} = \|\lambda \mathrm{P}^{-1}x\| = |\lambda|\|\mathrm{P}^{-1}x\| = |\lambda|\|x\|_\mathrm{B}$;
- $\|x + y\|_\mathrm{B} = \|\mathrm{P}^{-1}x + \mathrm{P}^{-1}y\| \leqslant \|\mathrm{P}^{-1}x\| + \|\mathrm{P}^{-1}y\| = \|x\|_\mathrm{B} + \|y\|_\mathrm{B}$;
- $\|x\|_\mathrm{B} = 0 \iff \|\mathrm{P}^{-1}x\| = 0 \iff \mathrm{P}^{-1}x = 0 \iff x = 0$ car P^{-1} est inversible.

On a alors $\|\mathrm{B}x\|_\mathrm{B} = \|\mathrm{DP}^{-1}x\|$. Posons $\mathrm{P}^{-1}x = (y_1, \dots, y_\ell)$. Alors $\|\mathrm{DP}^{-1}x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\ell} |\lambda_k y_k|^2} \leqslant \rho(\mathrm{B})\sqrt{\sum_{k=1}^{\ell} |y_k|^2} = \rho(\mathrm{B})\|\mathrm{P}^{-1}x\|$ car $\rho(\mathrm{B}) = \max_k |\lambda_k|$. Ainsi, $\|\mathrm{B}x\|_\mathrm{B} \leqslant \rho(\mathrm{B})\|x\|_\mathrm{B}$.

b) D'après la question précédente, il faut chercher C parmi les matrices non diagonalisables. Posons donc $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $\rho(C) = 0$ et $C \neq 0$ donc il existe $y \in \mathbb{C}^2$ tel que $Cy \neq 0$ et alors, pour toute norme N de $\mathbb{C}^2$ on a $N(Cy) > 0 = \rho(C)N(y)$.

5. Soit $\eta > 0$ tel que $\rho(A) + \eta < 1$. La question 3.b prouve l'existence d'une norme N telle que $N(Ax) \leqslant (\rho(A) + \eta)N(x)$, et la question 3.c qu'il existe un réel $C > 0$ tel que $\|x\| \leqslant N(x) \leqslant C\|x\|$.
En appliquant l'hypothèse à $x = x_n$ on obtient donc : $N(x_{n+1} - x^* - A(x_n - x^*)) \leqslant CMN(x_n - x^*)^2$ et avec l'inégalité triangulaire :

$$N(x_{n+1} - x^*) \leqslant N(A(x_n - x^*)) + CMN(x_n - x^*)^2 \leqslant (\rho(A) + \eta)N(x_n - x^*) + CMN(x_n - x^*)^2$$

La suite $u_n = N(x_n - x^*)$ vérifie donc une relation de type $u_{n+1} \leqslant au_n + bu_n^2$ avec $0 < a < 1$ et $b > 0$.
Commençons par étudier les suites (v_n) vérifiant la relation $v_{n+1} = av_n + bv_n^2 = f(v_n)$. La fonction f admet deux points fixes : 0 et $\dfrac{1-a}{b}$ et entre ces deux points fixes on a $0 \leqslant f(x) \leqslant x$. Il est alors facile de constater que si $v_0 \in \left[0, \dfrac{b}{1-a}\right[$ alors (v_n) décroit et tend vers 0.
On prouve alors par récurrence que si $v_0 = u_0 \in \left[0, \dfrac{1-a}{b}\right[$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, et donc que $\lim u_n = 0$.
Ainsi, si $N(x_0 - x^*) < \dfrac{1 - \rho(A) - \eta}{CM} = \epsilon$ alors la suite (x_n) converge vers x^*.

Troisième partie. Fonctions de deux variables réelles

1. *a)* D'après le théorème de Schwarz, $\hat{h}(s_1) = \displaystyle\int_c^d \frac{\partial^2 h}{\partial s_2 \partial s_1}(s_1, s_2)\,ds_2 = \frac{\partial h}{\partial s_1}(s_1, d) - \frac{\partial h}{\partial s_1}(s_1, c)$ et donc

$$\int_a^b \hat{h}(s_1)\,ds_1 = h(b,d) - h(a,d) - h(b,c) + h(a,c)$$

b) Le théorème de continuité des intégrales à paramètre permet de prouver sans peine que la fonction $\hat{h}$ est continue (car l'intervalle d'intégration est un segment). D'après l'égalité des accroissements finis appliquée à l'une de ses primitives il existe $\bar{s}_1 \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b \hat{h}(s_1)\,ds_1 = (b-a)\hat{h}(\bar{s}_1)$.

Pour les mêmes raisons il existe $\bar{s}_2 \in [c,d]$ tel que $\hat{h}(\bar{s}_1) = \displaystyle\int_c^d \frac{\partial^2 h}{\partial s_2 \partial s_1}(\bar{s}_1, s_2)\,ds_2 = (d-c)\frac{\partial^2 h}{\partial s_2 \partial s_1}(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$ donc $h(b,d) - h(a,d) - h(b,c) + h(a,c) = (b-a)(d-c)\dfrac{\partial^2 h}{\partial s_2 \partial s_1}(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$.

2. La fonction f est continue et strictement croissante donc réalise une bijection entre I et $f(I)$, et son application réciproque $g = f^{-1}$ est continue. Enfin, $f(I)$ est l'image réciproque par l'application continue g d'une partie ouverte I donc est elle aussi ouverte.
Puisque f' ne s'annule pas, g est de classe $\mathscr{C}^3$, et pour tout $y \in f(I)$, $g'(y) = \dfrac{1}{f'(g(y))}$.
Ainsi, pour tout $x \in I$, $g'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$ et en dérivant une seconde fois on obtient $g''(f(x)) = -\dfrac{f''(x)}{f'(x)^3}$.

3. *a)* $\displaystyle\int_0^1 g'\big(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)\big)\,d\lambda = \frac{1}{f(x) - f(y)}\Big[g\big(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)\big)\Big]_0^1 = \frac{x-y}{f(x)-f(y)}$ donc

$$x - f(x)\int_0^1 g'\big(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)\big)\,d\lambda = x - f(x)\frac{x-y}{f(x)-f(y)} = \frac{yf(x) - xf(y)}{f(x)-f(y)} = H_f(x,y)$$

b) Le théorème de convergence dominée permet de montrer que pour tout couple de suites $(x_n) et (y_n)$ qui convergent vers x la suite $u_n = \displaystyle\int_0^1 g'(\lambda f(x_n) + (1-\lambda)f(y_n))\,d\lambda$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 g'(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(x))\,d\lambda = g'(f(x))$, ce qui permet de prolonger la fonction H_f sur $I \times I$ en posant $H_f(x,x) = x - f(x)g'(f(x))$.

c) Voilà une question bien longue à rédiger ; je me contente d'en esquisser la démarche : considérons comme à la question précédente la fonction $K : (x,y) \mapsto \displaystyle\int_0^1 g'(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))\,d\lambda$. Le théorème de dérivation des intégrales à paramètre permet de prouver l'existence des quatre dérivées partielles secondes de la fonction K, et en procédant comme à la question précédente de prouver qu'elles sont continues (en tant que fonctions à deux variables). Ceci prouve que K est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $I \times I$, puis qu'il en est de même de la fonction H_f.

d) On a vu que $\mathrm{H}_f(x,x) = x - f(x)g'(f(x)) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

4. *a)* Appliquons la question 1.b à la fonction H_f, pour $a = c = x^*$, $b = x$ et $d = y$: il existe $(\overline{x},\overline{y}) \in \mathrm{I}_x \times \mathrm{I}_y$ tel que

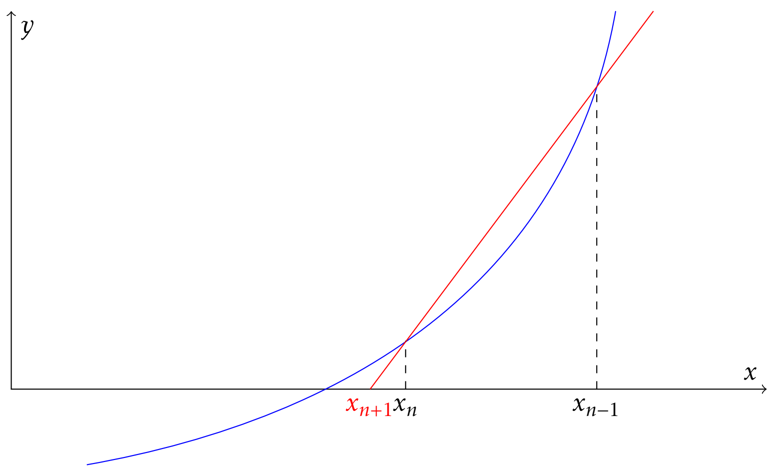
$$\mathrm{H}_f(x,y) - \mathrm{H}_f(x^*,y) - \mathrm{H}_f(x,x^*) + \mathrm{H}(x^*,x^*) = (x-x^*)(y-x^*)\frac{\partial^2 \mathrm{H}_f}{\partial x \partial y}(\overline{x},\overline{y})$$

Si $y \neq x^*$ on calcule $\mathrm{H}_f(x^*,y) = x^*$ car $f(x^*) = 0$, égalité qui se prolonge pour $y = x^*$ d'après la question 3d. De même, $\mathrm{H}_f(x,x^*) = \mathrm{H}_f(x^*,x^*) = x^*$ donc en définitive $\mathrm{H}_f(x,y) - x^* = (x-x^*)(y-x^*)\dfrac{\partial^2 \mathrm{H}_f}{\partial x \partial y}(\overline{x},\overline{y})$.

b) On réalise le calcul demandé à partir de la relation obtenue à la question 3.a :
$\dfrac{\partial \mathrm{H}_f}{\partial y}(x,y) = -f(x)f'(y)\displaystyle\int_0^1 (1-\lambda)g''(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))\,\mathrm{d}\lambda$.
$\dfrac{\partial^2 \mathrm{H}_f}{\partial x \partial y}(x,y) = -f'(x)f'(y)\displaystyle\int_0^1 (1-\lambda)g''(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))\,\mathrm{d}\lambda - f(x)f'(x)f'(y)\int_0^1 \lambda(1-\lambda)g''(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))\,\mathrm{d}\lambda$.
Sachant que $f(x^*) = 0$ il vient : $\dfrac{\partial^2 \mathrm{H}_f}{\partial x \partial y}(x^*,x^*) = -f'(x^*)^2\displaystyle\int_0^1 (1-\lambda)g''(0)\,\mathrm{d}\lambda = -\frac{f'(x^*)^3}{2}g''(0)$. Or d'après la question 2 appliquée à x^*, $g''(0) = g''(f(x^*)) = -\dfrac{f''(x^*)}{f'(x^*)^3}$ donc en définitive $\dfrac{\partial^2 \mathrm{H}_f}{\partial x \partial y}(x^*,x^*) = \dfrac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$.

Quatrième partie. Méthode de la sécante

1.



Lorsque $x_n \neq x_{n-1}$ la droite sécante a pour équation $y = f(x_n) + \dfrac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n)$. Puisque $f' > 0$ on a $f(x_n) - f(x_{n-1}) \neq 0$ et cette droite coupe l'axe des abscisse en $x_{n+1} = x_n - f(x_n)\dfrac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} = \mathrm{H}_f(x_{n-1},x_n)$.
Lorsque $x_n = x_{n-1}$ la tangente a pour équation $y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$ et cette droite coupe l'axe des abscisse en $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \mathrm{H}_f(x_n,x_n) = \mathrm{H}_f(x_{n-1},x_n)$.

2. *a)* On a $|h(x)| < 1 \iff h(x)^2 < 1 \iff (x-\alpha)^2 < (x-\beta)^2 \iff \alpha^2 - \beta^2 < 2(\alpha-\beta)x \iff \dfrac{\alpha+\beta}{2} < x \iff x \in \mathrm{I}$.

b) Si $x \neq y$ et $x + y \neq \alpha + \beta$ on calcule $\mathrm{H}_f(x,y) = \dfrac{\alpha\beta - xy}{\alpha + \beta - x - y}$; si $x \neq \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ on calcule $\mathrm{H}_f(x,x) = \dfrac{\alpha\beta - x^2}{\alpha+\beta-2x}$.

Ainsi, si x_n et x_{n-1} appartiennent à I, alors $x_n + x_{n-1} > \alpha + \beta$ et x_{n+1} est bien défini et egal à $x_{n+1} = \dfrac{\alpha\beta - x_n x_{n-1}}{\alpha + \beta - x_n - x_{n-1}}$. On calcule alors (plus ou moins laborieusement) $u_{n+1} = u_n u_{n-1}$, ce qui montre que $|h(x_{n+1})| < 1$, autrement dit que $x_{n+1} \in \mathrm{I}$.
Ainsi, nous avons montré que si x_0 et x_1 sont dans I alors la suite (x_n) est bien définie et à valeurs dans I.

c) Puisque la suite $(|u_n|)$ est à valeurs dans $[0,1[$ de la relation $u_{n+1} = u_n u_{n-1}$ on déduit que $|u_{n+1}| \leqslant |u_n|$. la suite $(|u_n|)$ décroit et est minorée par 0 donc possède une limite $\ell \in [0,1[$ vérifiant $\ell = \ell^2$, ce qui impose $\ell = 0$.

De l'égalité $x_n = \dfrac{\alpha - \beta u_n}{1 - u_n}$ on tire alors que $\lim x_n = \alpha$.

d) Si la suite u_n s'annule, alors la suite (x_n) est constante égale à α à partir d'un certain rang. Dans le cas contraire, on a $\ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) + \ln(u_{n-1})$ et il existe deux réels s et t tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) = s\phi^n + t(1-\phi)^n$. On a donc $u_n = e^{s\phi^n} \times e^{t(1-\phi)^n} \sim e^{s\phi^n}$ car $|1-\phi| < 1$ donc $\lim(1-\phi)^n = 0$, et puisque $\lim u_n = 0$ on a nécessairement $s < 0$.

De l'égalité $x_n - \alpha = \dfrac{(\alpha-\beta)u_n}{1-u_n}$ on déduit bien que $x_n - \alpha = \mathrm{O}(e^{s\phi^n})$.

3. *a)* I est un ouvert et f' est continue donc garde un signe constant au voisinage de x^* : il existe $\epsilon > 0$ tel que $[x^* - \epsilon, x^* + \epsilon] \subset \mathrm{I}$ et pour tout $x \in [x^* - \epsilon, x^* + \epsilon]$, $f'(x) > 0$.

b) D'après la question 4.a de la troisième partie, il existe $\overline{x}$ entre x_{n-1} et x^* et $\overline{y}$ entre x_n et x^* (donc tous deux dans $[x^* - \epsilon, x^* + \epsilon]$) tels que $|x_{n+1} - x^*| = \left|\mathrm{H}_f(x_{n-1}, x_n) - x^*\right| = \left|(x_{n-1} - x^*)(x_n - x^*)\dfrac{\partial^2 \mathrm{H}_f}{\partial x \partial y}(\overline{x}, \overline{y})\right| \leqslant \mathrm{M}|x_{n-1} - x^*||x_n - x^*|$.

c) Si $|x_{n-1} - x^*| \leqslant \epsilon'$ et $|x_n - x^*| \leqslant \epsilon'$, l'inégalité précédente prouve que $|x_{n+1} - x^*| \leqslant \mathrm{M}\epsilon'^2 < \epsilon'$, ce qui permet de prouver par récurrence que si x_0 et x_1 appartiennent à $[x^* - \epsilon', x^* + \epsilon']$ alors la suite (x_n) est bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [x^* - \epsilon', x^* + \epsilon']$.

En étant plus précis, cette inégalité prouve que pour tout $n \geqslant 1$, $|x_{n+1} - x^*| \leqslant (\mathrm{M}\epsilon')|x_n - x^*|$ puis par récurrence que $|x_n - x^*| \leqslant (\mathrm{M}\epsilon')^{n-1}|x_1 - x^*|$. Sachant que $\mathrm{M}\epsilon' < 1$ on en déduit que $\lim x_n = x^*$.