Matrices à coefficients dans $\{-1,1\}$ (X PC 2018)

Durée : libre

Ce sujet s'intéresse aux matrices carrées de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou à -1, et en particulier à la différence maximale entre le nombre de 1 et le nombre de -1 que l'on peut obtenir, si l'on autorise à multiplier certaines lignes et colonnes d'une telle matrice par -1.

La partie I s'intéresse à quelques cas particuliers. La partie II montre que pour certaines matrices, cette différence maximale est beaucoup plus petite que n^2. La partie III propose au contraire un minorant à cette différence maximale. La partie IV propose une démonstration de la formule de Stirling utilisée dans la partie III, et rappelée ci-dessous. Enfin, la partie V s'intéresse à la différence *minimale* entre le nombre de 1 et le nombre de -1.

Les quatre premières parties sont largement indépendantes.

Rappels

La formule de Stirling énonce un équivalent à $n!$, à savoir

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n.$$

On admet par ailleurs la valeur de l'intégrale de Gauss

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

Notations

Pour n et k entiers strictement positifs, on notera $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et k colonnes. On notera également $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n. On notera M^{T} la transposée d'une matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$. On identifiera l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ à l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à n coordonnées. En particulier, l'espace vectoriel des nombres réels est identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On étend les notations précédentes aux parties de $\mathbb{R}$: si K est une partie de $\mathbb{R}$, on notera par exemple $\mathcal{M}_{n,k}(\mathrm{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ constitué des matrices dont tous les coefficients sont à valeur dans K. Le sujet s'intéresse tout particulièrement à $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, l'ensemble des matrices carrées de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou à -1. Si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, on notera :

$$\mathrm{S}(\mathrm{A}) := \left\{\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathrm{Y} \;\middle|\; (\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in (\{-1,1\}^n)^2\right\}$$
$$\mathrm{M}(\mathrm{A}) := \max \mathrm{S}(\mathrm{A}).$$

Pour $n \geqslant 1$, on notera également

$$\underline{\mathrm{M}}(n) := \min\left\{\mathrm{M}(\mathrm{A}) \;\middle|\; \mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})\right\}.$$

Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires intervenant dans les parties II et III. On admettra que toutes les variables aléatoires introduites peuvent être construites sur cet espace. On notera $\mathbb{P}(\mathrm{E})$ la probabilité d'un événement $\mathrm{E} \subset \Omega$, et $\mathbb{E}[\mathrm{X}]$ l'espérance d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles.

Partie I.

Question 1. Quel est le cardinal de $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$? Cet ensemble est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Question 2. Montrer que pour toute matrice A dans $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, l'ensemble S(A) est inclus dans $\{-n^2, \ldots, n^2\}$. Montrer que l'inclusion est stricte (on pourra penser à un argument de parité), et montrer que S(A) est un ensemble symétrique, au sens où un entier k est dans S(A) si et seulement si $-k$ est dans S(A).

Question 3. Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$. On suppose qu'il existe des matrices diagonales C et D ne contenant que des 1 et des -1 sur la diagonale, telles que $\mathrm{B}=\mathrm{CAD}$. Montrer que $\mathrm{S(A)}=\mathrm{S(B)}$.

Question 4. Dans cette question, on suppose $n=2$, et on note

$$\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Calculer S(I) et S(J), et en déduire S(A) pour tout $\mathrm{A}\in\mathcal{M}_2(\{-1,1\})$.

Question 5. Soit $\mathrm{A}\in\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

(a) $n^2\in\mathrm{S(A)}$.

(b) Il existe X et Y dans $\{-1,1\}^n$ tels que $\mathrm{A}=\mathrm{XY}^{\mathrm{T}}$.

(c) A est de rang 1

Question 6. En déduire la proportion, parmi les matrices de $\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, des matrices A qui vérifient $n^2\in\mathrm{S(A)}$.

Partie II.

Soit k un entier strictement positif et $\mathrm{U}_1,\dots,\mathrm{U}_k$ une suite de k variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,1\}$, indépendantes et de loi uniforme. On note également

$$\mathrm{S}_k=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{U}_i.$$

Question 7. Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(\lambda)=\ln\Big(\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{U}_1}]\Big)$. Établir que

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\qquad \varphi(\lambda)\leqslant\frac{\lambda^2}{2}.$$

Question 8. Soit $t\in\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\lambda>0$, on a l'inégalité

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_k\geqslant t)\leqslant\exp\Big(k\varphi(\lambda)-\lambda t\Big).$$

Question 9. En déduire l'inégalité de Hoeffding pour S_k : pour tout $t>0$, on a

$$\mathbb{P}(\mathrm{S}_k\geqslant t)\leqslant\exp\Big(-\frac{t^2}{2k}\Big).$$

On introduit maintenant une variable aléatoire uniforme $\mathrm{C}:\Omega\to\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$. Pour $\omega\in\Omega$, on note $\mathrm{C}_{i,j}(\omega)$ les coefficients de la matrice $\mathrm{C}(\omega)$.

Question 10. Soient $\mathrm{X}=(x_1,\dots,x_n)$ et $\mathrm{Y}=(y_1,\dots,y_n)$ deux vecteurs quelconques dans $\{-1,1\}^n$. Montrer que $(x_iy_j\mathrm{C}_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une famille de n^2 variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,1\}$, indépendantes et de loi uniforme.

Question 11. Montrer que pour tout $t\geqslant 0$, on a

$$\mathbb{P}\Big(\mathrm{M(C)}\geqslant tn^{3/2}\Big)\leqslant\exp\Big(-\Big(\frac{t^2}{2}-2\ln 2\Big)n\Big).$$

Question 12. On rappelle la notation $\underline{\mathrm{M}}(n)=\min\Big\{\mathrm{M(A)}\;\Big|\;\mathrm{A}\in\mathcal{M}_n(\{-1,1\})\Big\}$. Montrer que pour tout $n\geqslant 1$, on a

$$\underline{\mathrm{M}}(n)\leqslant 2\sqrt{\ln 2}\,n^{3/2}.$$

Indication : on pourra commencer par montrer que pour tout $\epsilon>0$, il existe une matrice $\mathrm{A}\in\mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ telle que

$$\mathrm{M(A)}\leqslant(2\sqrt{\ln 2}+\epsilon)n^{3/2}.$$

Partie III.

Dans cette partie, on établit un minorant non trivial pour $\underline{\mathrm{M}}(n)$.

Question 13. Pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ et $Y = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \{-1,1\}^n$, on note

$$g_A(Y) = \max\Big\{X^T AY \;\Big|\; X \in \{-1,1\}^n\Big\}.$$

Montrer que la fonction g_A peut se réécrire

$$g_A(Y) = \sum_{i=1}^{n}\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}y_j\Big|.$$

Question 14. On introduit maintenant une variable aléatoire uniforme $Z : \Omega \to \{-1,1\}^n$. Pour $\omega \in \Omega$, on note $Z_i(\omega)$ les coordonnées de $Z(\omega)$. Montrer que pour tout $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$, on a

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}, \qquad \mathbb{E}\left[\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}Z_j\Big|\right] = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|n-2k|$$

où $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial. En déduire

$$\mathbb{E}\big[g_A(Z)\big] = \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|n-2k|.$$

Question 15.

a) Montrer que pour $m \in \{0,\dots,n-1\}$, on a

$$\sum_{k=0}^{m}(n-2k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{m}.$$

b) En déduire que pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$,

$$\mathbb{E}\big[g_A(Z)\big] = \frac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}$$

où $\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor$ désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$.

Question 16.

a) Montrer que

$$\underline{M}(n) \geqslant \frac{n^2}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}.$$

b) Montrer ensuite, à l'aide de la formule de Stirling rappelée en préambule, que ce minorant est équivalent à Cn^{α} quand n tend vers l'infini, pour des constantes C et $\alpha > 0$ que l'on explicitera. Comparer au majorant de $\underline{M}(n)$ obtenu à la question 12 de la partie II.

Partie IV.

Dans cette partie, on établit la formule de Stirling à l'aide d'une étude d'intégrales.

Question 17. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Déterminer par récurrence I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 18. Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a

$$I_n = \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}\int_{-\sqrt{n}}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}\,\mathrm{d}x.$$

Question 19. Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\mathrm{U} := \left\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; t > 0 \text{ et } x > -t\right\}$$

et soit f la fonction définie sur U par

$$f(t,x) = t^2 \ln(1 + \frac{x}{t}) - tx.$$

a) Montrer que pour tout $(t,x) \in \mathrm{U}$, on a :

$$x \leqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad f(t,x) \leqslant -\frac{x^2}{2}.$$

b) Pour $x > 0$, montrer que l'on a

$$\forall t \geqslant 1, \qquad f(t,x) \leqslant f(1,x).$$

Pour cela, on pourra commencer par écrire $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ sous la forme $t\mathrm{F}(x/t)$ pour une certaine fonction F que l'on étudiera.

Question 20. Déduire des questions précédentes la formule de Stirling.

Partie V.

Dans cette dernière partie, on fixe $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\{-1,1\})$ et on note

$$m(\mathrm{A}) := \min\Big(\mathrm{S}(\mathrm{A}) \cap \mathbb{N}\Big).$$

Question 21. Pour $\mathrm{Y} \in \{-1,1\}^n$, montrer que l'on a

$$\min\left\{|\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{AY}| \;\middle|\; \mathrm{X} \in \{-1,1\}^n\right\} \leqslant n$$

et en déduire que $m(\mathrm{A}) \leqslant n$.

Question 22. En s'inspirant de la question précédente et des méthodes développées dans les parties II et III, montrer que l'on a également

$$m(\mathrm{A}) \leqslant \sqrt{2n\ln(2n)}.$$