Le théorème de Courant-Fischer (X PC 2015)

Durée : libre

Dans ce problème, n est un entier strictement positif. L'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne associée $\|\cdot\|$; on l'identifie à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes à n coordonnées. Ainsi pour deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, $\langle x \mid y \rangle = x^{\mathrm{T}} y$.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'algèbre des matrices $n \times n$ à coefficients réels et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices réelles symétriques. On notera M^{T} la matrice transposée de M et I_n la matrice identité. Par abus de notation on identifiera $\langle x \mid y \rangle$ au vecteur à une ligne et une colonne $x^{\mathrm{T}} y$.

Les coordonnées d'un n-uplet m de réels (considéré comme vecteur ligne) seront notées $m_1, \dots, m_n$.

Si m est un n-uplet de réels, $m^{\downarrow}$ est le n-uplet obtenu à partir de m par permutation de ses coordonnées de sorte que $m_1^{\downarrow} \geqslant m_2^{\downarrow} \geqslant \cdots \geqslant m_n^{\downarrow}$. Autrement dit il s'agit du n-uplet obtenu à partir de m en ordonnant dans l'ordre décroissant les coordonnées de m. Par exemple, si $m = (3, 2, -1, 6, 2, 9)$, $m^{\downarrow} = (9, 6, 3, 2, 2, -1)$.

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera appelé, comme à l'habitude, spectre de M. On notera $s^{\downarrow}$ l'application de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à une matrice M symétrique associe le n-uplet (appelé *spectre ordonné*) de réels dont les coordonnées sont les éléments ordonnés dans l'ordre décroissant du spectre de M (répétés autant de fois que leur ordre de multiplicité). Ainsi, par exemple, si le spectre de la matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R})$ vaut $\{-1, 3, 3, 7\}$, on a $s^{\downarrow}(\mathrm{M}) = (7, 3, 3, -1)$.

Pour $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|\mathrm{M}\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|\mathrm{M}x\|$. On admet qu'il s'agit d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie I.

Question 1.

a) Rappeler pourquoi $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel et quelle est sa dimension. Pourquoi l'application $s^{\downarrow}$ est-elle bien définie sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$?

b) L'application $s^{\downarrow}$ est-elle linéaire ? Justifier votre réponse.

c) Si $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, exprimer $s^{\downarrow}(-\mathrm{M})$ en fonction des coordonnées $(m_1, \dots, m_n)$ de $s^{\downarrow}(\mathrm{M})$.

d) Soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \lambda & h \\ h & \mu \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Calculer $s^{\downarrow}(\mathrm{M})$.

Question 2.

a) Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $m = s^{\downarrow}(\mathrm{M})$ son spectre ordonné. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathrm{M} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i v_i v_i^{\mathrm{T}}$.

Une telle décomposition de M sera appelée dans la suite *résolution spectrale* de M.

b) Calculer $\sup\limits_{\|x\|=1} \langle x \mid \mathrm{M}x \rangle$ en fonction des coordonnées de m. Cette borne supérieure est-elle atteinte ? (On pourra décomposer x et $\mathrm{M}x$ sur la base orthonormée $(v_1, \dots, v_n)$ de la question 2.a.

c) Les notations sont celles de la question 2.a. Soit j un entier, $1 \leqslant j \leqslant n$. On note $\mathcal{V}_j$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(v_1, \dots, v_j)$, et $\mathcal{W}_j$ celui engendré par $(v_j, v_{j+1}, \dots, v_n)$. Montrer les égalités

$$\inf_{x \in \mathcal{V}_j, \|x\|=1} \langle x \mid \mathrm{M}x \rangle = \sup_{x \in \mathcal{W}_j, \|x\|=1} \langle x \mid \mathrm{M}x \rangle = m_j.$$

Question 3.

a) Soient $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que $\dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{V}) > n$.
Montrer que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ ne se réduit pas à $\{0\}$.

b) Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $m = s^{\downarrow}(\mathrm{M})$. Soit j un entier, $1 \leqslant j \leqslant n$, et $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension j. Montrer que

$$\inf_{x \in \mathcal{V}, \|x\|=1} \langle x \mid \mathrm{M}x \rangle \leqslant m_j.$$

(On pourra utiliser les questions 2.c et 3.a, en choisissant $\mathcal{U} = \mathcal{W}_j$.)

c) En reprenant les notations de la question 3.b, en déduire que :

$$\sup_{\mathcal{V}\subset\mathbb{R}^n,\,\dim\mathcal{V}=j}\left(\inf_{x\in\mathcal{V},\,\|x\|=1}\langle x\mid \mathrm{M}x\rangle\right)=m_j.$$

Cette borne supérieure est-elle atteinte ?

Question 4. Soient m et ℓ deux n-uplets de réels. On note

$$\ell\preccurlyeq m \quad \text{si et seulement si, pour tout entier } j, 1\leqslant j\leqslant n,\quad \ell_j\leqslant m_j.$$

a) Soient $\mathrm{L},\mathrm{M}\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $(0,\dots,0)\preccurlyeq s^{\downarrow}(\mathrm{M}-\mathrm{L})$. Montrer que $s^{\downarrow}(\mathrm{L})\preccurlyeq s^{\downarrow}(\mathrm{M})$.

b) Montrer que pour toute matrice $\mathrm{M}\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $(0,\dots,0)\preccurlyeq s^{\downarrow}\big(\|\mathrm{M}\|\mathrm{I}_n-\mathrm{M}\big)$.

c) Soit $\mathrm{L},\mathrm{M}\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $m=s^{\downarrow}(\mathrm{M})$ et $\ell=s^{\downarrow}(\mathrm{L})$. Montrer que

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}|\ell_j-m_j|\leqslant\|\mathrm{L}-\mathrm{M}\|$$

d) Conclure que la fonction $s^{\downarrow}:\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^n$ est continue.

Question 5. On note $\mathcal{S}_n^{\dagger}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques $n\times n$ dont toutes les valeurs propres sont simples.

a) Soit $\mathrm{M}\in\mathcal{S}_n^{\dagger}(\mathbb{R})$. Déterminer un réel $r>0$ tel que la boule ouverte de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ centrée en M et de rayon r soit incluse dans $\mathcal{S}_n^{\dagger}(\mathbb{R})$. En déduire que $\mathcal{S}_n^{\dagger}(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que la première composante $s_1^{\downarrow}$ de $s^{\downarrow}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{S}_2^{\dagger}(\mathbb{R})$ mais pas sur $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. (On pourra utiliser la question 1.d.)

Partie II.

Dans toute cette partie, on considère deux matrices symétriques réelles $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et leur somme $\mathrm{C}=\mathrm{A}+\mathrm{B}$. On note $a=s^{\downarrow}(\mathrm{A})$, $b=s^{\downarrow}(\mathrm{B})$ et $c=s^{\downarrow}(\mathrm{C})$.

Question 6.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^n c_i=\sum_{i=1}^n a_i+\sum_{i=1}^n b_i$.

b) Montrer que $a_1+b_1\geqslant c_1$.

c) Montrer que $a_n+b_n\leqslant c_n$.

Question 7.

a) Soient $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ tels que $\dim\mathcal{U}+\dim\mathcal{V}+\dim\mathcal{W}>2n$.
Montrer que $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}\cap\mathcal{W}$ ne se réduit pas à $\{0\}$.

b) En utilisant des résolutions spectrales de A, B et C, montrer que si les entiers strictement positifs j et k vérifient $j+k\leqslant n+1$, on a $c_{j+k-1}\leqslant a_j+b_k$.
En déduire pour tout entier j, $1\leqslant j\leqslant n$, $a_j+b_n\leqslant c_j$.

Question 8. On note a_{ii} pour $1\leqslant i\leqslant n$ les éléments diagonaux de A.

a) Démontrer que $a_{11}\leqslant a_1$.

b) Soient j et k des entiers positifs tels que $1\leqslant j<k$ et $s_1\geqslant s_2\geqslant\cdots\geqslant s_k$ des réels.
On définit $\mathcal{D}_{j,k}=\Big\{(t_1,\dots,t_k)\in[0,1]^k\ \Big|\ t_1+\cdots+t_k=j\Big\}$ et f la fonction de $\mathcal{D}_{j,k}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(t_1,\dots,t_k)=\sum_{i=1}^k s_it_i.$$

Démontrer que pour tout $(t_1,\dots,t_k)\in\mathcal{D}_{j,k}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^j s_i-f(t_1,\dots,t_k)\geqslant\sum_{i=1}^j(s_i-s_j)(1-t_i)$.

En déduire que $\displaystyle\sup_{\mathcal{D}_{j,k}}f=\sum_{i=1}^j s_i$.

c) Montrer que, plus généralement qu'en 8.a, on a pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$

$$\sum_{i=1}^{j} a_{ii} \leqslant \sum_{i=1}^{j} a_i.$$

d) En déduire que pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$

$$\sum_{i=1}^{j} a_i = \sup_{(x_1,\dots,x_j)\in\mathcal{R}_j} \sum_{i=1}^{j} \langle x_i \mid \mathrm{A}x_i \rangle$$

où $\mathcal{R}_j$ est l'ensemble des familles orthonormales de cardinal j dans $\mathbb{R}^n$.

e) En conclure que l'on a pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant n$

$$\sum_{i=1}^{j} c_i \leqslant \sum_{i=1}^{j} a_i + \sum_{i=1}^{j} b_i.$$

Partie III.

Dans toute cette partie, on étudie le cas $n = 2$. Pour deux réels u et v tels que $u \geqslant v$, on note :

$$\mathrm{S}(u,v) = \left\{ \mathrm{M} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; s^{\downarrow}(\mathrm{M}) = \{u,v\} \right\}.$$

On fixe $a_1 \geqslant a_2$ et $b_1 \geqslant b_2$, quatre réels vérifiant la relation $a_1 - a_2 \geqslant b_1 - b_2$.
On cherche à identifier l'ensemble

$$\Sigma = \left\{ s^{\downarrow}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \;\middle|\; \mathrm{A} \in \mathrm{S}(a_1,a_2),\ \mathrm{B} \in \mathrm{S}(b_1,b_2) \right\}$$

autrement dit l'ensemble des spectres possibles de somme de deux matrices symétriques réelles de spectres respectifs donnés.

Question 9. Montrer que Σ est inclus dans un segment de droite L de longueur $\sqrt{2}(b_1 - b_2)$, et dont on précisera les extrémités. On pourra étudier d'abord le cas où A et B sont diagonales.

Question 10.

a) Montrer que $\Sigma = \left\{ s^{\downarrow}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \;\middle|\; \mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix},\ \mathrm{B} \in \mathrm{S}(b_1,b_2) \right\}$.

b) Déterminer une fonction continue définie sur $[-\pi,\pi]$ dont l'image vaut $\mathrm{S}(b_1,b_2)$.

c) Montrer que $\Sigma = \mathrm{L}$.

♦ ♦
♦