Corrigé : corrigé : le théorème de Courant-Fischer (X PC 2015)

Partie I.

Question 1.

a) Notons (E_{ij}) la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; alors $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}\big(\mathrm{E}_{ij} + \mathrm{E}_{ji} \;\big|\; 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\big)$ donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable donc ses valeurs propres sont réelles, ce qui permet de les ordonner et justifie la définition de $s^{\downarrow}$.

b) Si $n \geqslant 2$ l'application $s^{\downarrow}$ n'est pas linéaire. Si on considère par exemple les deux matrices diagonales $\mathrm{M}_1 = \mathrm{diag}(1,0,\cdots,0)$ et $\mathrm{M}_2 = \mathrm{diag}(-1,0,\ldots,0)$ on a $s^{\downarrow}(\mathrm{M}_1) = (1,0,\ldots,0)$, $s^{\downarrow}(\mathrm{M}_2) = (0,\ldots,0,-1)$ et $s^{\downarrow}(\mathrm{M}_1+\mathrm{M}_2) = (0,\ldots,0)$ donc $s^{\downarrow}(\mathrm{M}_1+\mathrm{M}_2) \neq s^{\downarrow}(\mathrm{M}_1) + s^{\downarrow}(\mathrm{M}_2)$.

c) Si $s^{\downarrow}(\mathrm{M}) = (m_1,\ldots,m_n)$ alors $\mathrm{Sp}(-\mathrm{M}) = \{-m_1,\ldots,-m_n\}$ donc $s^{\downarrow}(-\mathrm{M}) = (-m_n,\ldots,-m_1)$.

d) $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}) = \left\{\dfrac{\lambda+\mu\pm\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4h^2}}{2}\right\}$ donc $s^{\downarrow}(\mathrm{M}) = \left(\dfrac{\lambda+\mu+\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4h^2}}{2}, \dfrac{\lambda+\mu-\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4h^2}}{2}\right)$.

Question 2.

a) M est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée $(v_1,\ldots,v_n)$ de $\mathbb{R}^n$: $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\mathrm{M}v_j = m_j v_j$.
Considérons la matrice $\mathrm{M}' = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i v_i v_i^{\mathrm{T}}$. Sachant que la base (v) est orthonormée on a $v_i^{\mathrm{T}} v_j = \delta_{ij}$ donc $\mathrm{M}'v_j = m_j v_j = \mathrm{M}v_j$.
Les matrices M et M′ coïncident sur une même base donc sont égales.

b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| = 1$, et notons $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i v_i$. Alors $\mathrm{M}x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i m_i v_i$ et $\langle x \mid \mathrm{M}x\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2$.
Ainsi, $\langle x \mid \mathrm{M}x\rangle \leqslant m_1 \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = m_1$. Mais pour $x = v_1$ on a $\langle x \mid \mathrm{M}x\rangle = m_1$ donc $\displaystyle\sup_{\|x\|=1} \langle x \mid \mathrm{M}x\rangle = m_1$, cette borne supérieure étant atteint par exemple pour $x = v_1$.

c) Soit $x \in \mathcal{W}_j$ tel que $\|x\| = 1$: on pose $x = \displaystyle\sum_{i=j}^{n} x_i v_i$. Alors $\mathrm{M}x = \displaystyle\sum_{i=j}^{n} x_i m_i v_i$ et $\langle x \mid \mathrm{M}x\rangle = \displaystyle\sum_{i=j}^{n} m_i x_i^2 \leqslant m_j \sum_{i=j}^{n} x_i^2 = m_j$. Puisque ce majorant est atteint pour $x = v_j$ on en déduit que $\displaystyle\sup_{x\in\mathcal{W}_j, \|x\|=1} \langle x \mid \mathrm{M}x\rangle = m_j$.

De même, soit $x \in \mathcal{V}_j$ tel que $\|x\| = 1$: on pose $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{j} x_i v_i$. Alors $\mathrm{M}x = \displaystyle\sum_{i=1}^{j} x_i m_i v_i$ et $\langle x \mid \mathrm{M}x\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{j} m_i x_i^2 \geqslant m_j \sum_{i=1}^{j} x_i^2 = m_j$.
Puisque ce minorant est atteint pour $x = v_j$ on en déduit que $\displaystyle\inf_{x\in\mathcal{V}_j, \|x\|=1} \langle x \mid \mathrm{M}x\rangle = m_j$.

Question 3.

a) D'après la formule de Grassmann $\dim(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}) = \dim\mathcal{U} - \dim\mathcal{V} - \dim(\mathcal{U}+\mathcal{V})$ et puisque $\dim(\mathcal{U}+\mathcal{V}) \leqslant \dim(\mathbb{R}^n) = n$ on en déduit $\dim(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}) > 0$.

b) Posons $\mathcal{U} = \mathcal{W}_j$. On a $\dim\mathcal{U} = n+1-j$ donc $\dim\mathcal{U} + \dim\mathcal{V} = n+1 > n$. D'après la question précédente on peut choisir $x_0 \in \mathcal{U}\cap\mathcal{V}$ tel que $x_0 \neq 0$ et, quitte à diviser par sa norme, supposer $\|x_0\| = 1$. D'après la question 2.c on a, puisque $x_0 \in \mathcal{W}_j$, $\langle x_0 \mid \mathrm{M}x_0\rangle \leqslant m_j$. Mais par ailleurs, puisque $x_0 \in \mathcal{V}$ on a $\displaystyle\inf_{x\in\mathcal{V}, \|x\|=1} \langle x \mid \mathrm{M}x\rangle \leqslant \langle x_0 \mid \mathrm{M}x_0\rangle$ et donc $\displaystyle\inf_{x\in\mathcal{V}, \|x\|=1} \langle x \mid \mathrm{M}x\rangle \leqslant m_j$.

c) La question 3.b prouve que m_j est un majorant de $\displaystyle\inf_{x\in\mathcal{V}, \|x\|=1} \langle x \mid \mathrm{M}x\rangle$ lorsque $\dim\mathcal{V} = j$. La question 2.c prouve que ce majorant est atteint pour $\mathcal{V} = \mathcal{V}_j$; on en déduit que $\displaystyle\sup_{\dim\mathcal{V}=j}\Big(\inf_{x\in\mathcal{V}, \|x\|=1} \langle x \mid \mathrm{M}x\rangle\Big) = m_j$, cette borne supérieure étant atteinte en particulier pour $\mathcal{V} = \mathcal{V}_j$.

Question 4.

a) Posons $\mathrm{Sp}(\mathrm{M}-\mathrm{L})=\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$. L'hypothèse se traduit par : $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\lambda_i\geqslant 0$. Considérons une base orthonormée $(v_1,\dots,v_n)$ qui diagonalise $\mathrm{M}-\mathrm{L}$: pour tout $x=\sum_{i=1}^n x_iv_i$ on a $(\mathrm{M}-\mathrm{L})x=\sum_{i=1}^n \lambda_ix_iv_i$ donc $\langle x\mid(\mathrm{M}-\mathrm{L})x\rangle=\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i^2\geqslant 0$, soit

$$\forall x\in\mathrm{E},\quad \langle x\mid \mathrm{L}x\rangle\leqslant\langle x\mid \mathrm{M}x\rangle.$$

Posons $s^{\downarrow}(\mathrm{M})=m$ et $s^{\downarrow}(\mathrm{L})=\ell$. Soit $j\in[\![1,n]\!]$. Considérons un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\dim\mathcal{V}=j$, et $x\in\mathcal{V}$ tel que $\|x\|=1$. Nous venons de prouver que $\langle x\mid \mathrm{L}x\rangle\leqslant\langle x\mid \mathrm{M}x\rangle$ donc $\inf\limits_{x\in\mathcal{V},\|x\|=1}\langle x\mid \mathrm{L}x\rangle\leqslant\inf\limits_{x\in\mathcal{V},\|x\|=1}\langle x\mid \mathrm{M}x\rangle$, puis $\sup\limits_{\dim\mathcal{V}=j}\Big(\inf\limits_{x\in\mathcal{V},\|x\|=1}\langle x\mid \mathrm{L}x\rangle\Big)\leqslant\sup\limits_{\dim\mathcal{V}=j}\Big(\inf\limits_{x\in\mathcal{V},\|x\|=1}\langle x\mid \mathrm{M}x\rangle\Big)$. D'après la question précédente on a prouvé que $\ell_j\leqslant m_j$, soit $\ell\leqslant m$.

b) Soit $\lambda\in\mathrm{Sp}(\|\mathrm{M}\|\mathrm{I}_n-\mathrm{M})$, et $x\in\mathbb{R}^n$ tel que $\|x\|=1$ et $(\|\mathrm{M}\|\mathrm{I}_n-\mathrm{M})x=\lambda x$.
On a $\mathrm{M}x=(\|\mathrm{M}\|-\lambda)x$ donc $\|\mathrm{M}x\|=\big|\|\mathrm{M}\|-\lambda\big|\|x\|=\big|\|\mathrm{M}\|-\lambda\big|$. Or $\|\mathrm{M}x\|\leqslant\|\mathrm{M}\|$ donc $\big|\|\mathrm{M}\|-\lambda\big|\leqslant\|\mathrm{M}\|$.
Ceci prouve en particulier que $\|\mathrm{M}\|-\lambda\leqslant\|\mathrm{M}\|$, soit $\lambda\geqslant 0$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(\|\mathrm{M}\|\mathrm{I}_n-\mathrm{M})\subset\mathbb{R}_+$, soit $(0,\dots,0)\leqslant s^{\downarrow}(\|\mathrm{M}\|\mathrm{I}_n-\mathrm{M})$.

c) Appliquons la question précédente à la matrice $\mathrm{L}-\mathrm{M}$: $(0,\dots,0)\leqslant s^{\downarrow}(\|\mathrm{L}-\mathrm{M}\|\mathrm{I}_n+\mathrm{M}-\mathrm{L})$.
D'après la question 4.a on en déduit $s^{\downarrow}(\mathrm{L})\leqslant s^{\downarrow}(\|\mathrm{L}-\mathrm{M}\|\mathrm{I}_n+\mathrm{M})$.
Mais $s^{\downarrow}(\mathrm{L})=(\ell_1,\dots,\ell_n)$ et $s^{\downarrow}(\|\mathrm{L}-\mathrm{M}\|\mathrm{I}_n+\mathrm{M})=(\|\mathrm{L}-\mathrm{M}\|+m_1,\dots,\|\mathrm{L}-\mathrm{M}\|+m_n)$ donc on a prouvé que pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $\ell_j\leqslant\|\mathrm{L}-\mathrm{M}\|+m_j$.
En intervertissant les rôles de M et L on a aussi $m_j\leqslant\|\mathrm{M}-\mathrm{L}\|+\ell_j$, ce qui prouve que pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $|\ell_j-m_j|\leqslant\|\mathrm{L}-\mathrm{M}\|$.

d) Utilisons sur $\mathbb{R}^n$ la norme $\|x\|_\infty=\max(|x_1|,\dots,|x_n|)$, en ayant posé $x=(x_1,\dots,x_n)$.
La question précédente a prouvé que $\|s^{\downarrow}(\mathrm{L})-s^{\downarrow}(\mathrm{M})\|_\infty\leqslant\|\mathrm{L}-\mathrm{M}\|$, autrement dit que la fonction $s^{\downarrow}$ est 1-lipschitzienne, et donc continue sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Question 5.

a) Posons $m=s^{\downarrow}(\mathrm{M})$ et $r=\dfrac{1}{2}\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n-1}(m_{j+1}-m_j)$. Puisque $\mathrm{M}\in\mathcal{S}_n^{\dagger}(\mathbb{R})$ on a $r>0$.
Soit $\mathrm{L}\in\mathrm{B}(\mathrm{M},r)$ un élément de la boule ouverte de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ centrée en M et de rayon r. D'après 4.c on a pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $|\ell_j-m_j|\leqslant\|\mathrm{L}-\mathrm{M}\|<r$, soit $\ell_j\in\big]m_j-r,m_j+r\big[$. Or par définition de r les intervalles $\big]m_j-r,m_j+r\big[$ et $\big]m_{j+1}-r,m_{j+1}+r\big[$ sont disjoints, ce qui prouve que $\ell_j<\ell_{j+1}$. Par voie de conséquence, $\mathrm{L}\in\mathcal{S}_n^{\dagger}(\mathbb{R})$, soit $\mathrm{B}(\mathrm{M},r)\subset\mathcal{S}_n^{\dagger}(\mathbb{R})$.
$\mathcal{S}_n^{\dagger}(\mathbb{R})$ est donc voisinage de chacun de ses points ; c'est un ouvert.

b) D'après 1.d, $s_1^{\downarrow}(\mathrm{M})=\dfrac{\lambda+\mu-\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4h^2}}{2}$; il s'agit donc d'étudier la fonction $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ définie par $f(\lambda,\mu,h)=\dfrac{\lambda+\mu-\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4h^2}}{2}$. Cette fonction n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ puisque la fonction $\sqrt{\cdot}$ n'est pas dérivable en 0 ; $s_1^{\downarrow}$ n'est donc pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. La fonction f est en revanche de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\big\{(\lambda,\mu,h)\in\mathbb{R}^3\ \big|\ \lambda=\mu \text{ et } h=0\big\}$, ensemble qui correspond aux matrices M de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ qui ont deux valeurs propres distinctes, autrement dit $\mathcal{S}_2^{\dagger}(\mathbb{R})$.

Partie II.

Question 6.

a) L'égalité $\mathrm{tr}(\mathrm{C})=\mathrm{tr}(\mathrm{A})+\mathrm{tr}(\mathrm{B})$ se traduit simplement par $\sum_{i=1}^n c_i=\sum_{i=1}^n a_i+\sum_{i=1}^n b_i$.

b) D'après 2.b, $c_1=\sup\limits_{\|x\|=1}\langle x\mid \mathrm{C}x\rangle=\sup\limits_{\|x\|=1}\Big(\langle x\mid \mathrm{A}x\rangle+\langle x\mid \mathrm{B}x\rangle\Big)\leqslant\sup\limits_{\|x\|=1}\langle x\mid \mathrm{A}x\rangle+\sup\limits_{\|x\|=1}\langle x\mid \mathrm{B}x\rangle=a_1+b_1$.

c) D'après 3.c, $c_n=\inf\limits_{\|x\|=1}\langle x\mid \mathrm{C}x\rangle=\inf\limits_{\|x\|=1}\Big(\langle x\mid \mathrm{A}x\rangle+\langle x\mid \mathrm{B}x\rangle\Big)\geqslant\inf\limits_{\|x\|=1}\langle x\mid \mathrm{A}x\rangle+\inf\limits_{\|x\|=1}\langle x\mid \mathrm{B}x\rangle=a_n+b_n$.

Question 7.

a) D'après la formule de Grassmann,

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}\cap\mathcal{W}) &= \dim(\mathcal{U}\cap\mathcal{V})+\dim\mathcal{W}-\dim((\mathcal{U}\cap\mathcal{V})+\mathcal{W})\\ &= \dim\mathcal{U}+\dim\mathcal{V}+\dim\mathcal{W}-\dim(\mathcal{U}+\mathcal{V})-\dim((\mathcal{U}\cap\mathcal{V})+\mathcal{W})\end{aligned}$$

Or $\dim(\mathcal{U}+\mathcal{V})\leqslant n$ et $\dim((\mathcal{U}\cap\mathcal{V})+\mathcal{W})\leqslant n$ donc $\dim(\mathcal{U}\cap\mathcal{V}\cap\mathcal{W})>2n-2n=0$, soit $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}\cap\mathcal{W}\neq\{0\}$.

b) À partir des décompositions spectrales de a, b et c on peut définir les sous-espaces vectoriels $\mathcal{V}_j^a$ et $\mathcal{W}_j^a$, $\mathcal{V}_j^b$ et $\mathcal{W}_j^b$, $\mathcal{V}_j^c$ et $\mathcal{W}_j^c$ comme à la question 2.c.

On a $\dim\mathcal{W}_j^a+\dim\mathcal{W}_k^b+\dim\mathcal{V}_{j+k-1}^c=(n-j+1)+(n-k+1)+(j+k-1)=2n+1>2n$ donc d'après la question précédente il existe $x\in\mathcal{W}_j^a\cap\mathcal{W}_k^b\cap\mathrm{V}_{k+j-1}^c$ tel que $\|x\|=1$.

D'après 2.c, $x\in\mathcal{W}_j^a$ donc $\langle x\mid \mathrm{A}x\rangle\leqslant a_j$. $x\in\mathcal{W}_k^b$ donc $\langle x\mid \mathrm{B}x\rangle\leqslant b_k$. $x\in\mathcal{V}_{j+k-1}^c$ donc $\langle x\mid \mathrm{C}x\rangle\geqslant c_{j+k-1}$.

Sachant que $\mathrm{C}=\mathrm{A}+\mathrm{B}$ on en déduit $c_{j+k-1}\leqslant\langle x\mid \mathrm{C}x\rangle=\langle x\mid \mathrm{A}x\rangle+\langle x\mid \mathrm{B}x\rangle\leqslant a_j+b_k$.

De même, $\dim\mathcal{V}_j^a+\dim\mathcal{V}_n^b+\dim\mathcal{W}_j^c=j+n+(n-j+1)=2n+1>2n$ donc en considérant un élément x de norme 1 dans l'intersection $\mathcal{V}_j^a\cap\mathcal{V}_n^b\cap\mathcal{V}_j^c$ on a $c_j\geqslant\langle x\mid \mathrm{C}x\rangle=\langle x\mid \mathrm{A}x\rangle+\langle x\mid \mathrm{B}x\rangle\geqslant a_j+b_n$.

Question 8.

a) Si on note (e) la base canonique de $\mathbb{R}^n$ on a $\|e_1\|=1$ et $a_{11}=\langle e_1\mid \mathrm{A}e_1\rangle$ donc d'après 2.b, $a_{11}\leqslant a_1$.

b) On a $\displaystyle\sum_{i=1}^{j}s_i-f(t_1,\dots,t_k)=\sum_{i=1}^{j}s_i(1-t_i)-\sum_{i=j+1}^{k}s_it_i$, donc il s'agit de prouver que $\displaystyle\sum_{i=j+1}^{k}s_it_i\leqslant\sum_{i=1}^{j}s_j(1-t_i)$.

Or $\displaystyle\sum_{i=1}^{j}s_j(1-t_i)=s_j\Big(j-\sum_{i=1}^{j}t_i\Big)=s_j\sum_{i=j+1}^{k}t_i$ car $(t_1,\dots,t_k)\in\mathcal{D}_{j,k}$ donc le résultat vient du fait que pour tout $i\in[\![j+1,k]\!]$, $s_i\leqslant s_j$.

On a donc $\displaystyle f(t_1,\dots,t_k)\leqslant\sum_{i=1}^{j}s_j$, avec égalité pour $t_1=\cdots=t_j=1$ et $t_{j+1}=\cdots=t_k=0$, donc $\displaystyle\sup_{\mathcal{D}_{j,k}}f=\sum_{i=1}^{j}s_i$.

c) Notons toujours (e) la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et considérons une résolution spectrale $(v_1,\dots,v_n)$ de A.

On a $a_{ii}=\langle e_i\mid \mathrm{A}e_i\rangle$, $\displaystyle e_i=\sum_{k=1}^{n}\langle v_k\mid e_i\rangle v_k$ et $\displaystyle\mathrm{A}e_i=\sum_{k=1}^{n}\langle v_k\mid e_i\rangle a_kv_k$. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{j}a_{ii}=\sum_{i=1}^{j}\sum_{k=1}^{n}a_k\langle v_k\mid e_i\rangle^2=\sum_{k=1}^{n}a_kt_k\quad\text{avec } t_k=\sum_{i=1}^{j}\langle v_k\mid e_i\rangle^2.$$

On a $\displaystyle 0\leqslant t_k\leqslant\sum_{i=1}^{n}\langle v_k\mid e_i\rangle^2=\|v_k\|^2=1$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}t_k=\sum_{i=1}^{j}\|e_i\|^2=j$ donc on peut appliquer la question précédente à $f(t_1,\dots,t_k)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kt_k$ et conclure que $\displaystyle\sum_{i=1}^{j}a_{ii}\leqslant\sum_{i=1}^{j}a_i$.

d) Ce raisonnement s'applique à toute base orthonormée (e) dès lors qu'on remplace $\displaystyle\sum_{i=1}^{j}a_{ii}$ par $\displaystyle\sum_{i=1}^{j}\langle e_i\mid \mathrm{A}e_i\rangle$. Sachant que toute famille orthonormée $(x_1,\dots,x_j)$ peut être complétée pour former une base orthonormée, nous avons prouvé que pour tout $(x_1,\dots,x_j)\in\mathcal{R}_j$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{j}\langle x_i\mid \mathrm{A}x_i\rangle\leqslant\sum_{i=1}^{j}a_i$.

Or pour la famille $(v_1,\dots,v_j)$ on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{j}\langle v_i\mid \mathrm{A}v_i\rangle=\sum_{i=1}^{j}a_i$, donc en définitive, $\displaystyle\sup_{(x_1,\dots,x_j)\in\mathcal{R}_j}\sum_{i=1}^{j}\langle x_i\mid \mathrm{A}x_i\rangle=\sum_{i=1}^{j}a_i$.

e) Pour tout $(x_1,\dots,x_j)\in\mathcal{R}_j$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{j}\langle x_j\mid \mathrm{C}x_j\rangle=\sum_{i=1}^{j}\langle x_j\mid \mathrm{A}x_j\rangle+\sum_{i=1}^{j}\langle x_j\mid \mathrm{B}x_j\rangle\leqslant\sum_{i=1}^{j}a_i+\sum_{i=1}^{j}b_i$. En passant à la borne supérieure on en déduit $\displaystyle\sum_{i=1}^{j}c_i\leqslant\sum_{i=1}^{j}a_i+\sum_{i=1}^{j}b_i$.

Partie III.

Question 9. Lorsque A et B sont diagonales, on a $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ ou $B = \begin{pmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$ donc $A + B$ peut prendre l'une des quatre valeurs suivantes :

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 & 0 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_1 + b_2 & 0 \\ 0 & a_2 + b_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_2 + b_1 & 0 \\ 0 & a_1 + b_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_2 + b_2 & 0 \\ 0 & a_1 + b_1 \end{pmatrix}$$

et sachant que $a_1 + b_2 \geqslant a_2 + b_1$ on en déduit que $s^{\downarrow}(A + B) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = M_1$ ou $s^{\downarrow}(A + B) = (a_1 + b_2, a_2 + b_1) = M_2$.
Nous obtenons ainsi deux points M_1 et M_2 de Σ, et $d(M_1, M_2) = \sqrt{2}(b_1 - b_2)$. Compte tenu de l'énoncé on peut penser qu'il s'agit maintenant de montrer que $\Sigma \subset [M_1, M_2]$.
Considérons maintenant $A \in S(a_1, a_2)$ et $B \in S(b_1, b_2)$ quelconques et posons $C = A + B$ et $s^{\downarrow}(C) = (c_1, c_2)$. IL faut montrer que le point $M = (c_1, c_2)$ appartient au segment $[M_1 M_2]$.
On calcule $\det(\overrightarrow{M_1 M}, \overrightarrow{M_2 M}) = \begin{vmatrix} c_1 - a_1 - b_1 & b_2 - b_1 \\ c_2 - a_2 - b_2 & b_1 - b_2 \end{vmatrix} = (b_1 - b_2)(c_1 + c_2 - a_1 - a_2 - b_1 - b_2) = (b_2 - b_1)(\operatorname{tr} C - \operatorname{tr} A - \operatorname{tr} B) = 0$ donc M appartient à la droite $(M_1 M_2)$.
Considérons maintenant l'abscisse de M : d'après 6b et 7b on a $a_1 + b_2 \leqslant c_1 \leqslant a_1 + a_2$ donc l'abscisse de M est située entre celle de M_2 et celle de M_1. On en déduit que $M \in [M_1, M_2]$ et donc que $\Sigma \subset [M_1, M_2]$.

Question 10.

a) Soit $A \in S(a, b)$; A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée : il existe $P \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^T$ avec $D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$.
De l'égalité $A + B = P(D + P^T BP)P^T$ on tire que $s^{\downarrow}(A + B) = s^{\downarrow}(D + P^T BP)$. Or l'application $\left(\begin{array}{ccc} S(b_1, b_2) & \longmapsto & S(b_1, b_2) \\ B & \longmapsto & P^T BP \end{array}\right)$ est bijective, donc $\Sigma = \left\{ s^{\downarrow}(A + B) \,\middle|\, A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, B \in S(b_1, b_2) \right\}$.

b) Soit $B \in S(b_1, b_2)$ et e_1 un vecteur propre unitaire pour la valeur propre b_1. On pose $e_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in [-\pi, \pi]$, puis $e_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$. On sait qu'alors $Be_2 = b_2 e_2$, donc $B = P(\theta)DP(\theta)^T$ avec $P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$. Réciproquement, toute matrice de cette forme appartient à $S(b_1, b_2)$, donc $S(b_1, b_2)$ est l'image de $[-\pi, \pi]$ par l'application continue

$$B : \theta \mapsto P(\theta)DP(\theta)^T = \begin{pmatrix} b_1 \cos^2\theta + b_2 \sin^2\theta & (b_1 - b2 \cos\theta \sin\theta \\ (b_1 - b_2)\cos\theta \sin\theta & b_1 \sin^2\theta + b_2 \cos^2\theta \end{pmatrix}.$$

c) Notons $f : \theta \mapsto s^{\downarrow}(A + B(\theta))$ avec $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$.
Des deux questions précédentes et de la question 4.d il résulte que f est continue et que $\Sigma = f([-\pi, \pi])$.
Montrons pour finir que $[M_1, M_2] \subset \Sigma$, en considérant un point $M = (x, y) \in [M_1, M_2]$. On a $f(0) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = M_1$ et $f(\pi/2) = (a_1 + b_2, a_2 + b_1) = M_2$ donc en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à la première composante de f on prouve l'existence de $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que l'abscisse de $f(\theta)$ soit égale à x. Mais puisqu'on a déjà montré que $\Sigma \subset [M_1, M_2]$, le seul point possible est le point M : on a donc $M = f(\theta) \in \Sigma$.