Répartition modulo 1 de suites de nombres réels (X PC 2008)

Durée : libre

Partie I

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1.1. Démontrer que M possède une unique valeur propre réelle λ, et que $\lambda \in]1,2[$.

1.2. Soit σ une valeur propre complexe non réelle de M. Calculer $\lambda|\sigma|^2$ et comparer les réels $|\sigma|$, 1, et $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

1.3.

a) Démontrer que $(\mathrm{I}, \mathrm{M}, \mathrm{M}^2)$ forme une famille libre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Calculer M^3 et l'exprimer comme combinaison linéaire à coefficients entiers de I et M.

c) En déduire qu'il existe deux entiers α et β tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{M}^{n+3} = \alpha \mathrm{M}^{n+1} + \beta \mathrm{M}^n$. (Par convention, $\mathrm{M}^0 = \mathrm{I}$, et $\mathrm{M}^1 = \mathrm{M}$).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \mathrm{tr}(\mathrm{M}^n)$ et $v_n = \cos(\pi u_n)$.

1.4.

a) Pour $0 \leqslant n \leqslant 10$, calculer u_n et v_n.

b) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique et préciser sa période.

c) Démontrer que la suite $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $w_k = \sum_{n=0}^{k} v_n$ n'est pas bornée.

1.5.

a) Exprimer u_n en fonction de λ, σ et n.

b) La suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $y_k = \sum_{n=0}^{k} \cos(\pi\lambda^n)$ est-elle bornée ?

Dans la suite du problème on note ϕ la fonction périodique de période 1 qui à tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ associe $|x|$.

Partie II

2.6. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\cos(2\pi y) = \cos\big(2\pi\phi(y)\big)$.

2.7.

a) Soient α et β deux nombres réels tels que $1 \leqslant \alpha < \beta$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{I}_n = \int_\alpha^\beta \cos(2\pi x^n)\,\mathrm{d}x$, et on admet le théorème suivant :

> *Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $[a,b]$. On suppose que la suite (f_n) converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f, et qu'il existe une constante K telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [a,b]$, $\big|f_n(t)\big| \leqslant \mathrm{K}$. Alors la suite numérique (u_n) de terme général $u_n = \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge vers $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.*

On suppose dans cette seule question 7.a que pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, $\lim_{n\to+\infty} \phi(x^n) = 0$. Démontrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\beta - \alpha$.

b) À l'aide d'un changement de variable et d'une intégration par parties, déterminer la limite de la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Que peut-on déduire des deux questions précédentes ?

Partie III

On pose $a_0 = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \phi(t)\,\mathrm{d}t$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 2\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \phi(t)\cos(2\pi n t)\,\mathrm{d}t$.

3.8.

a) Calculer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $|a_n| \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)}$.

On considère la suite de fonctions S_p définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\mathrm{S}_p(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{p} a_n \cos(2n\pi x)$ et on admet que si la suite (S_p) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ alors sa somme est égale à ϕ.

3.9. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a $\left|\phi(x) - \mathrm{S}_p(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{p+1}$.

3.10. Démontrer que le réel λ défini dans la question 1.1 n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. (*On pourra utiliser le fait qu'un nombre rationnel strictement positif non entier est le quotient de deux entiers strictement positifs a et b tels qu'aucun facteur premier de b ne divise a.*)

3.11. Soit λ le réel défini dans la question 1.1. Démontrer que pour tout $q \in \mathbb{Z}^*$ et $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ on a $\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{e}^{2inq\lambda\pi}\right| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin(\pi q \lambda)\right|}$.

3.12. Déduire des questions précédentes que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left|\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \phi(n\lambda) - \frac{1}{4}\right| \leqslant \frac{1}{p+1} + \frac{1}{4\mathrm{N}} \sup_{1 \leqslant q \leqslant p} \frac{1}{|\sin(\pi q \lambda)|}$$

3.13. Déduire de ce qui précède que la suite $\left(\dfrac{1}{\mathrm{N}}\displaystyle\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \phi(n\lambda)\right)_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}^*}$ a une limite que l'on précisera.

♦ ♦
♦