Corrigé : répartition modulo 1 de suites de nombres réels (X PC 2008)

Partie I

1.1. On calcule $\chi_M(x) = x^3 - x - 1$ puis $\chi'_M(x) = 3x^2 - 1$. On en déduit les variations de χ_M sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$		1		2		$+\infty$
$\chi_M(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	α	$\searrow$	β	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

On a $\alpha = \chi_M(-1/\sqrt{3}) = \dfrac{2\sqrt{3}}{9} - 1 < 0$ donc $\beta < 0$ et χ_M possède une unique racine réelle λ, située dans l'intervalle $\left]1/\sqrt{3}, +\infty\right[$.
Plus précisément, $\chi_M(1) < 0$ et $\chi_M(2) > 0$ donc $\lambda \in]1, 2[$.

1.2. On en déduit que les deux autres racines de χ_M sont deux nombre complexes conjugués σ et $\overline{\sigma}$. Les produit des trois racines vaut 1 (l'opposé du coefficient constant) donc $\lambda\sigma\overline{\sigma} = \lambda|\sigma|^2 = 1$. On a donc $|\sigma| = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \in \left]\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$ puisque $\lambda \in]1, 2[$.

1.3.

a) Supposons la famille (I, M, M^2) liée : il existe $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tel que $aI + bM + cM^2 = 0$. En posant $P = a + bX + cX^2$ on dispose d'un polynôme non nul de degré 2 vérifiant $P(M) = 0$. Mais alors toute valeur propre de M est racine de P et c'est absurde puisque P ne possède qu'au plus deux racines distinctes alors que M possède trois valeurs propres.

b) D'après le théorème de Cayley-Hamilton χ_M est un polynôme annulateur de M donc $M^3 = M + I$.

c) En multipliant par M^n on obtient $M^{n+3} = M^{n+1} + M^n$.

1.4.

a) La question précédente nous permet d'obtenir une relation de récurrence : $\mathrm{tr}(M^{n+3}) = \mathrm{tr}(M^{n+1}) + \mathrm{tr}(M^n)$, soit $u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$. On calcule ensuite $u_0 = \mathrm{tr}(I) = 3$, $u_1 = \mathrm{tr}(M) = 0$ et $u_2 = \mathrm{tr}(M^2) = 2$ puis à l'aide de la relation de récurrence :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	3	0	2	3	2	5	5	7	10	12	17
v_n	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1

b) On prouve sans peine par récurrence que $u_n \in \mathbb{N}$ et donc que $v_n = (-1)^{u_n}$. La relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n) conduit alors à la relation $v_{n+3} = v_{n+1}v_n$.
On observe ensuite dans le tableau que $v_0 = v_7$, $v_1 = v_8$ et $v_2 = v_9$, ce qui permet de prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_{n+7}$: la suite (v_n) est périodique de période 7.

c) Il en résulte que $w_{7k-1} = kw_6 = -k$ (c'est la somme de k paquets de même valeur) et donc que $\lim w_{7k-1} = -\infty$: la suite (w_k) n'est pas bornée.

1.5.

a) On a vu que $\mathrm{Sp}(M) = \left\{\lambda, \sigma, \overline{\sigma}\right\}$ donc $u_n = \mathrm{tr}(M^n) = \lambda^n + \sigma^n + \overline{\sigma}^n = \lambda^n + 2\,\mathfrak{Re}(\sigma^n)$.

b) Ainsi, $\cos(\pi\lambda^n) = \cos\big(\pi u_n - 2\pi\,\mathfrak{Re}(\sigma^n)\big) = \cos(\pi u_n)\cos\big(2\pi\,\mathfrak{Re}(\sigma^n)\big) + \sin(\pi u_n)\sin\big(2\pi\,\mathfrak{Re}(\sigma^n)\big) = v_n\cos\big(2\pi\,\mathfrak{Re}(\sigma^n)\big)$ puisque $u_n \in \mathbb{N}$.
Nous avons vu à la question 1.2 que $0 \leqslant |\sigma| < 1$ donc $\lim \sigma^n = 0$. Ainsi, $\cos\big(2\pi\,\mathfrak{Re}(\sigma^n)\big) = 1 - 2\pi^2\,\mathfrak{Re}(\sigma^n)^2 + \mathrm{o}\big(\mathfrak{Re}(\sigma^n)^2\big)$.

Ceci montre que $\cos(\pi\lambda^n) = v_n + x_n$ avec $|x_n| \sim 2\pi^2\big|\mathfrak{Re}(\sigma^n)\big|^2$ et donc que $y_k = w_k + \displaystyle\sum_{n=0}^{k} x_n$.

On a $\big|\mathfrak{Re}(\sigma^n)\big| \leqslant |\sigma|^n$ donc $|x_n| = \mathrm{O}(|\sigma|^{2n})$ avec $|\sigma| < 1$ donc la série $\sum x_n$ est absolument convergente et ses sommes partielles sont bornées. Mais d'après 1.4c la suite (w_k) n'est pas bornée, donc la suite (y_k) ne l'est pas non plus.

Partie II

2.6. Soit $y \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\dfrac{1}{2} < y - k \leqslant \dfrac{1}{2}$. On a alors $\phi(y) = \phi(y-k) = |y-k| = \epsilon(y-k)$ avec $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Ainsi, $\cos(2\pi\phi(y)) = \cos(2\pi\epsilon(y-k)) = \cos(2\pi(y-k)) = \cos(2\pi y)$ puisque cos est paire et 2π-périodique.

2.7.

a) D'après la question précédente, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_\alpha^\beta \cos(2\pi\phi(x^n))\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Par hypothèse faite à cette question la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction constante $f : x \mapsto 1$ et $|f_n(x)| \leqslant 1$ donc le théorème de convergence dominée s'applique : $\lim \mathrm{I}_n = \displaystyle\int_\alpha^\beta \mathrm{d}x = \beta - \alpha$.

b) Posons $y = x^n$, soit $x = y^{\frac{1}{n}}$. On a $\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}y$ et $\mathrm{I}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{\alpha^n}^{\beta^n} \cos(2\pi y) y^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}y$. Effectuons maintenant une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= \left[\frac{1}{2\pi n}\sin(2\pi y) y^{\frac{1}{n}-1}\right]_{\alpha^n}^{\beta^n} + \frac{1}{2\pi n}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\int_{\alpha^n}^{\beta^n} \sin(2\pi y) y^{\frac{1}{n}-2}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi n}\sin(2\pi\beta^n)\beta^{1-n} - \frac{1}{2\pi n}\sin(2\pi\alpha^n)\alpha^{1-n} + \frac{1}{2\pi n}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\int_{\alpha^n}^{\beta^n} \sin(2\pi y) y^{\frac{1}{n}-2}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

On a $\alpha \geqslant 1$ et $\beta > 1$ donc les deux premiers termes de cette somme tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
Par ailleurs, $\left|\dfrac{1}{2\pi n}\Big(1 - \dfrac{1}{n}\Big)\displaystyle\int_{\alpha^n}^{\beta^n} \sin(2\pi y) y^{\frac{1}{n}-2}\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \dfrac{1}{2\pi n}\Big(1 - \dfrac{1}{n}\Big)\displaystyle\int_{\alpha^n}^{\beta^n} y^{\frac{1}{n}-2}\,\mathrm{d}y = \dfrac{1}{2\pi n}\big(\alpha^{1-n} - \beta^{1-n}\big) \longrightarrow 0.$
On en déduit que $\lim \mathrm{I}_n = 0$.

c) Ceci montre que l'hypothèse faite à la question 2.7a est fausse : dès lors que $1 \leqslant \alpha < \beta$ il existe nécessairement un x dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$ tel que la suite $\big(\phi(x^n)\big)$ ne tende pas vers 0.

Partie III

3.8.

a) Par parité on a $a_0 = 2\displaystyle\int_0^{1/2} \phi(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{1/2} t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toujours par parité, $a_n = 4\displaystyle\int_0^{1/2} t\cos(2n\pi t)\,\mathrm{d}t$.
Deux intégrations par parties successives fournissent alors

$$a_n = \left[\frac{2t}{n\pi}\sin(2n\pi t) + \frac{1}{(n\pi)^2}\cos(2n\pi t)\right]_0^{1/2} = \frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^2}$$

En définitive nous avons donc $a_0 = \dfrac{1}{4}$, $a_{2p} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_{2p+1} = \dfrac{-2}{\pi^2(2p+1)^2}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si n est pair on a $a_n = 0$ donc la majoration est évidente ; si n est impair on a $|a_n| = \dfrac{2}{n^2\pi^2}$ et la majoration revient à prouver que $1 + \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\pi^2}{2}$, ce qui est vrai puisque $1 + \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{3}{2}$ et $\dfrac{9}{2} \leqslant \dfrac{\pi^2}{2}$.

3.9. La question précédente prouve que la convergence de la série est normale donc uniforme sur $\mathbb{R}$; on peut donc appliquer le résultat admis, et ainsi $\phi(x) - \mathrm{S}_p(x) = \displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n\cos(2n\pi x)$. On en déduit :

$$\big|\phi(x) - \mathrm{S}_p(x)\big| \leqslant \sum_{n=p+1}^{+\infty} |a_n| \leqslant \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \leqslant \sum_{p=n+1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = \frac{1}{p+1} \quad \text{par télescopage}$$

3.10. Supposons λ rationnel, et posons dans ce cas $\lambda = \dfrac{p}{q}$ avec $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$.
De l'égalité $\lambda^3 = \lambda + 1$ on tire $p^3 = q^2(p+q)$ donc q divise p^3. Mais p et q n'ont pas de facteurs premiers en commun donc nécessairement $q = 1$ et $\lambda = p \in \mathbb{N}$, ce qui est absurde puisque $1 < \lambda < 2$.
On en déduit que λ est irrationnel.

3.11. Puisque λ est irrationnel $q\lambda$ n'est pas entier et donc $e^{2iq\lambda\pi} \neq 1$. Ainsi,

$$\left|\sum_{n=1}^{N} e^{2inq\lambda\pi}\right| = \left|e^{2iq\lambda\pi}\,\frac{1-e^{2iNq\lambda\pi}}{1-e^{2iq\lambda\pi}}\right| \leqslant \frac{2}{|1-e^{2iq\lambda\pi}|} = \frac{1}{\left|\sin(q\lambda\pi)\right|}$$

3.12. Notons déjà que

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\phi(n\lambda)-\frac{1}{4}\right| &= \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\phi(n\lambda)-a_0\right)\right| = \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\phi(n\lambda)-S_p(n\lambda)\right)+\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(S_p(n\lambda)-a_0\right)\right|\\ &\leqslant \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|\phi(n\lambda)-S_p(n\lambda)\right| + \frac{1}{N}\left|\sum_{n=1}^{N}\left(S_p(n\lambda)-a_0\right)\right|\end{aligned}$$

D'après la question 3.9, $\displaystyle\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|\phi(n\lambda)-S_p(n\lambda)\right| \leqslant \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{p+1} = \frac{1}{p+1}$.

Par ailleurs, $\displaystyle S_p(n\lambda)-a_0 = \sum_{q=1}^{p} a_q\cos(2qn\lambda\pi) = \mathfrak{Re}\left(\sum_{q=1}^{p} a_q\, e^{2iqn\lambda\pi}\right)$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\left(S_p(n\lambda)-a_0\right) = \mathfrak{Re}\left(\sum_{q=1}^{p} a_q\sum_{n=1}^{N} e^{2iqn\lambda\pi}\right)$ et ainsi $\displaystyle\left|\sum_{n=1}^{N}\left(S_p(n\lambda)-a_0\right)\right| \leqslant \sum_{q=1}^{p}|a_q|\left|\sum_{n=1}^{N} e^{2iqn\lambda\pi}\right| \leqslant \sum_{q=1}^{p}\frac{|a_q|}{\left|\sin(q\lambda\pi)\right|}$ (d'après 3.11) $\displaystyle\leqslant \sup_{1\leqslant q\leqslant p}\frac{1}{\left|\sin(q\lambda\pi)\right|}\sum_{q=1}^{p}|a_q|$.

Il reste à observer que d'après 3.8 on a $a_q \leqslant 0$ et $a_q = O\left(\frac{1}{q^2}\right)$ donc $\displaystyle\sum_{q=1}^{p}|a_q| \leqslant \sum_{q=1}^{+\infty}|a_q| = -\sum_{q=1}^{+\infty}a_q = a_0-\phi(0) = \frac{1}{4}$ et ainsi,

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\phi(n\lambda)-\frac{1}{4}\right| \leqslant \frac{1}{p+1}+\frac{1}{4N}\sup_{1\leqslant q\leqslant p}\frac{1}{\left|\sin(q\lambda\pi)\right|}$$

3.13. Soit $\epsilon>0$. On choisis un entier p vérifiant $\frac{1}{p+1}\leqslant\frac{\epsilon}{2}$; une fois cet entier fixé la quantité $\displaystyle\sup_{1\leqslant q\leqslant p}\frac{1}{\left|\sin(q\lambda\pi)\right|}$ est une constante donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{4N}\sup_{1\leqslant q\leqslant p}\frac{1}{\left|\sin(q\lambda\pi)\right|}=0$ et il existe un rang K à partir duquel : $\displaystyle N\geqslant K \implies \frac{1}{4N}\sup_{1\leqslant q\leqslant p}\frac{1}{\left|\sin(q\lambda\pi)\right|}\leqslant\frac{\epsilon}{2}$.

On a ainsi montré que pour tout $\epsilon>0$ il existe un rang K pour lequel : $\displaystyle N\geqslant K \implies \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\phi(n\lambda)-\frac{1}{4}\right|\leqslant\epsilon$, autrement dit :

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\phi(n\lambda)=\frac{1}{4}$$