Polynômes unitaires de norme minimale (d'après X PC 2004)

Durée : libre

Pour tout entier $d \geqslant 0$, on désigne par $\mathscr{E}_d$ l'espace vectoriel complexe des polynômes à coefficients complexes de degré $\leqslant d$ et par $\mathscr{U}_d$ le sous-ensemble des polynômes unitaires (autrement dit de coefficient dominant égal à 1) de degré d.

Première partie

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $x_1, \dots, x_n$ des nombres complexes distincts. On considère le polynôme

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} (\mathrm{X} - x_k),$$

et l'on désigne par P' le polynôme dérivé de P.

Question 1. Pour tout entier j, $1 \leqslant j \leqslant n$, on pose $\mathrm{L}_j(\mathrm{X}) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{X})}{(\mathrm{X} - x_j)\mathrm{P}'(x_j)}$.

a) Montrer, en posant $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X} - x_j)\mathrm{Q}_j(\mathrm{X})$, que cette expression définit un polynôme L_j de degré $n-1$.

b) Calculer $\mathrm{L}_j(x_k)$, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, et montrer que, pour tout polynôme F, le polynôme $\mathrm{L}_\mathrm{F} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathrm{F}(x_j)\mathrm{L}_j$ prend la même valeur que F en tous les points $x_1, \dots, x_n$.

c) Montrer que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathrm{L}_j = 1$.

d) Les polynômes L_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, forment-ils une base de $\mathscr{E}_{n-1}$?

Question 2. Pour $1 \leqslant j \leqslant n$, on pose $\mathrm{L}_j(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b_{k,j}\mathrm{X}^k$, où $b_{k,j} \in \mathbb{C}$.

Soient V et B les matrices complexes $n \times n$ dont les éléments à la i^e ligne ($1 \leqslant i \leqslant n$) et à la j^e colonne ($1 \leqslant j \leqslant n$) sont respectivement x_i^{j-1} et $b_{i-1,j}$. Montrer que V est inversible, et que V et B sont inverses l'une de l'autre.

Question 3.

a) Montrer que $b_{n-1,j} = \dfrac{1}{\mathrm{P}'(x_j)}$. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^j}{\mathrm{P}'(x_k)}$ pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$.

b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(\mathrm{X} - x_k)^{n-1}}{\mathrm{P}'(x_k)}$ est un polynôme constant que l'on calculera.

Dans toute la suite du problème, $d \in \mathbb{N}^*$ est un entier fixé, et K *est une partie fermée et bornée du plan complexe, contenant au moins $d+1$ éléments.* On pose $\rho = \sup\limits_{z \in \mathrm{K}} |z|$. Pour tout polynôme $\mathrm{Q} \in \mathscr{E}_d$, on pose $\|\mathrm{Q}\|_\mathrm{K} = \sup\limits_{z \in \mathrm{K}} \left|\mathrm{Q}(z)\right|$.

Deuxième partie

Pour tout polynôme $\mathrm{Q} \in \mathscr{E}_d$, défini par $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \displaystyle\sum_{i=0}^{d} a_i \mathrm{X}^i$, on pose $\mathrm{N}(\mathrm{Q}) = \max\limits_{0 \leqslant i \leqslant d} |a_i|$.

Question 4.

a) Montrer que $\mathrm{Q} \mapsto \mathrm{N}(\mathrm{Q})$ et $\mathrm{Q} \mapsto \|\mathrm{Q}\|_\mathrm{K}$ sont des normes sur $\mathscr{E}_d$ et qu'elles sont équivalentes.

b) La fonction $\mathrm{Q} \mapsto \|\mathrm{Q}\|_\mathrm{K}$ est-elle continue sur l'espace vectoriel normé $\left(\mathscr{E}_d, \|\cdot\|_\mathrm{K}\right)$?

Question 5.

a) Majorer $\sup\limits_{\substack{Q\in\mathscr{E}_d\\ Q\neq 0}} \dfrac{\|Q\|_K}{N(Q)}$ en fonction de ρ.

b) On choisit $n = d+1$ points distincts dans K, $x_1, \ldots, x_{d+1}$, et l'on reprend les notations de la première partie, notamment les matrices V et B. On pose $\beta = \max\limits_{\substack{0\leqslant i\leqslant d\\ 1\leqslant j\leqslant d+1}} |b_{i,j}|$. En utilisant les résultats de la question 2, montrer que

$$\sup_{\substack{Q\in\mathscr{E}_d\\ Q\neq 0}} \frac{N(Q)}{\|Q\|_K} \leqslant \beta(d+1).$$

Dans toute la suite du problème, on pose $m = \inf\limits_{Q\in\mathscr{U}_d} \|Q\|_K$.

Question 6.

a) Montrer que $0 \leqslant m \leqslant \rho^d$.

b) On pose $\mathscr{A} = \left\{Q \in \mathscr{U}_d \;\middle|\; \|Q_k\| \leqslant \rho^d\right\}$. Montrer que $\mathscr{A}$ est non vide et que $m = \inf\limits_{Q\in\mathscr{A}} \|Q\|_K$.

c) Justifier que $\mathscr{U}_d$ est fermé et que $\mathscr{A}$ est fermé et borné, et en déduire qu'il existe $Q_0 \in \mathscr{U}_d$ tel que $\|Q_0\|_K = m$.

Troisième partie

Question 7. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et c_k un nombre complexe non nul. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On considère le polynôme

$$Q(X) = 1 + c_k(X - z_0)^k.$$

Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\left|Q(z)\right| > \left|Q(z_0)\right|$ (on pourra considérer le module et l'argument de c_k et de $z - z_0$).

Question 8. Plus généralement, soit $Q \in \mathscr{E}_d$ et soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que $Q(z_0) = 1$ et que Q n'est pas constant.

a) Montrer qu'il existe un entier $k \geqslant 1$, un nombre complexe c_k, $c_k \neq 0$, et un polynôme R tels que

$$Q(X) = 1 + c_k(X - z_0)^k + c_k(X - z_0)^{k+1}R(X).$$

b) Montrer que, pour tout réel $r > 0$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - z_0| = r$ et

$$Q(z) = 1 + |c_k|\,|z - z_0|^k + |c_k|\,|z - z_0|^k(z - z_0)R(z).$$

c) Montrer que, pour tout réel $r > 0$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - z_0| \leqslant r$ et $\left|Q(z)\right| > \left|Q(z_0)\right|$.

Question 9. Montrer que la propriété démontrée à la question précédente est satisfaite pour tout polynôme non constant $Q \in \mathscr{E}_d$ et pour tout point $z_0 \in \mathbb{C}$, à savoir :

pour tout réel $r > 0$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - z_0| \leqslant r$ et $\left|Q(z)\right| > \left|Q(z_0)\right|$.

Question 10. Dans cette question, on considère un polynôme non constant Q dans $\mathscr{E}_d$.

a) Justifier l'inégalité : $\sup\limits_{|z|=1}\left|Q(z)\right| \leqslant \sup\limits_{|z|\leqslant 1}\left|Q(z)\right|$.

b) Justifier l'existence de $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| \leqslant 1$ et $\left|Q(z_0)\right| = \sup\limits_{|z|\leqslant 1}\left|Q(z)\right|$. À l'aide de la question 9, prouver que $|z_0| = 1$ (on pourra raisonner par l'absurde), et en déduire que : $\sup\limits_{|z|\leqslant 1}\left|Q(z)\right| = \sup\limits_{|z|=1}\left|Q(z)\right|$.

Question 11. Dans cette question, on considère un polynôme non constant Q dans $\mathscr{E}_d$.

a) Justifier l'existence d'un polynôme $\widetilde{Q}$ de $\mathscr{E}_d$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $Q(z) = z^d\widetilde{Q}\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

b) En déduire que : $\sup\limits_{|z|\geqslant 1}\left|\dfrac{Q(z)}{z^d}\right| = \sup\limits_{|z|=1}\left|Q(z)\right|$.

Question 12. Dans cette question, on choisit enfin $K = \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| \leqslant 1\right\}$. Montrer que le polynôme $Q_0(X) = X^d$ vérifie $\|Q_0\|_K = m$.