Corrigé : polynômes unitaires de norme minimale (d'après X PC 2004)

Première partie

Question 1.

a) Nous avons $P'(X) = Q_j(X) + (X - x_j)Q'(X)$ donc $P'(x_j) = Q_j(x_j)$, et $L_j(X) = \dfrac{Q_j(X)}{Q_j(x_j)}$ apparaît bien comme l'expression d'un polynôme de degré $n-1$.

b) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Lorsque $k \neq j$, x_k est racine de Q_j, donc $L_j(x_k) = 0$. Lorsque $k = j$, l'expression obtenue à la question précédente montre que $L_j(x_j) = 1$. On reconnait bien sûr les polynômes d'interpolation de Lagrange relatifs aux points $x_1, \dots, x_n$. Ainsi, $L_F(x_k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} F(x_j)L_j(x_k) = F(x_k)$.

c) Lorsqu'on applique cette égalité au polynôme $F(X) = 1$ on obtient : $L_F = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} L_j$, et ainsi $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $L_F(x_k) = 1$. Le polynôme $L_F - 1$ est de degré $\leqslant n-1$ et s'annule n fois, il s'agit du polynôme nul, et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} L_j = 1$.

d) Lorsque F est un polynôme de degré $\leqslant n-1$, le polynôme $L_F - F$ est de degré $\leqslant n-1$ et s'annule n fois, donc est égal au polynôme nul. Ceci montre que pour tout $F \in \mathscr{E}_{n-1}$, $F = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} F(x_j)L_j$; autrement dit, la famille L_j, $1 \leqslant j \leqslant n$ est une famille génératrice de $\mathscr{E}_{n-1}$. Puisque $\dim \mathscr{E}_{n-1} = n$, elle en constitue une base.

Question 2. Déterminons le produit VB. Le terme d'indice (i,j) de cette matrice vaut :

$$\sum_{k=1}^{n} x_i^{k-1} b_{k-1,j} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{k,j} x_i^k = L_j(x_i) = \delta_{i,j}.$$

Ceci prouve que $VB = I_n$, donc que ces matrices sont inversibles et que $V^{-1} = B$.

Question 3.

a) $b_{n-1,j}$ est le coefficient de plus haut degré de L_j qui vaut, d'après l'expression initiale de ce polynôme, $\dfrac{1}{P'(x_j)}$. Nous avons donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^j}{P'(x_k)} = \sum_{k=1}^{n} b_{n-1,k} x_k^j$. On reconnaît l'expression du coefficient d'indice $(n, j+1)$ de la matrice BV. Or ces matrices sont inverses l'une de l'autre, donc $BV = I_n$, et ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^j}{P'(x_k)} = \sum_{k=1}^{n} b_{n-1,k} x_k^j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n-1 \\ 0 & \text{si } j \neq n \end{cases}$.

b) Nous avons $(X - x_k)^{n-1} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j x_k^j X^{n-1-j}$, donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(X - x_k)^{n-1}}{P'(x_k)} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^j}{P'(x_k)} \Big) X^{n-1-j}$. Compte tenu de la question précédente, il va rester uniquement le terme correspondant à $j = n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(X - x_k)^{n-1}}{P'(x_k)} = (-1)^{n-1}.$$

Deuxième partie

Question 4.

a) Les applications $Q \mapsto N(Q)$ et $Q \mapsto \|Q\|_K$ sont définies sur $\mathscr{E}_d$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. De plus,

– pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $N(\lambda Q) = \max\limits_i |\lambda a_i| = |\lambda| \max\limits_i |a_i| = |\lambda| N(Q)$ et $\|\lambda Q\|_K = \sup\limits_K \big|\lambda Q(z)\big| = |\lambda| \sup\limits_K \big|Q(z)\big| = |\lambda| \, \|Q\|_K$;

- $\mathrm{N}(\mathrm{Q}_1+\mathrm{Q}_2)=\max_i |a_i+b_i| \leqslant \max_i(|a_i|+|b_i|) \leqslant \max_i |a_i| + \max_i |b_i| = \mathrm{N}(\mathrm{Q}_1)+\mathrm{N}(\mathrm{Q}_2)$, et
  $\|\mathrm{Q}_1+\mathrm{Q}_2\|_{\mathrm{K}} = \sup_{\mathrm{K}}\left|\mathrm{Q}_1(z)+\mathrm{Q}_2(z)\right| \leqslant \sup_{\mathrm{K}}\left(\left|\mathrm{Q}_1(z)\right|+\left|\mathrm{Q}_2(z)\right|\right) \leqslant \sup_{\mathrm{K}}\left|\mathrm{Q}_1(z)\right| + \sup_{\mathrm{K}}\left|\mathrm{Q}_2(z)\right| = \|\mathrm{Q}_1\|_{\mathrm{K}}+\|\mathrm{Q}_2\|_{\mathrm{K}}$;
- $\mathrm{N}(\mathrm{Q})=0 \iff \forall i \in [\![0,d]\!],\ a_i=0 \iff \mathrm{Q}=0$, et
  $\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}=0 \iff \forall z\in\mathrm{K},\ \mathrm{Q}(z)=0 \iff \mathrm{Q}=0$ (car Q possède ainsi au moins $d+1$ racines, alors que $\deg \mathrm{Q} \leqslant d$).

De ceci il résulte que $\mathrm{Q}\mapsto \mathrm{N}(\mathrm{Q})$ et $\mathrm{Q}\mapsto \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}$ sont des normes sur $\mathscr{E}_d$. Puisque ce dernier est de dimension finie, ces deux normes sont équivalentes.

b) D'après l'inégalité triangulaire, $\left|\|\mathrm{Q}_1\|_{\mathrm{K}}-\|\mathrm{Q}_2\|_{\mathrm{K}}\right| \leqslant \|\mathrm{Q}_1-\mathrm{Q}_2\|_{\mathrm{K}}$, ce qui traduit le fait que l'application $\mathrm{Q}\mapsto\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}$ est 1-lipschitzienne, donc continue sur $\mathscr{E}_d$.

Question 5.

a) Si $\mathrm{Q}(\mathrm{X})=\sum_{i=0}^{d} a_i\mathrm{X}^i$, alors $\left|\mathrm{Q}(z)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{d}|a_i||z|^i \leqslant \sum_{i=1}^{d}|a_i|\rho^i \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{Q})\sum_{i=0}^{d}\rho^i$, donc $\sup_{\mathrm{Q}\neq 0}\frac{\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}}{\mathrm{N}(\mathrm{Q})} \leqslant \sum_{i=0}^{d}\rho^i$.

b) Pour tout $j\in[\![1,d+1]\!]$, on a $\mathrm{Q}(x_j)=\sum_{i=0}^{d}a_i x_j^i$, égalités qui se résument à la formule matricielle :

$$\begin{pmatrix}\mathrm{Q}(x_1)\\ \mathrm{Q}(x_2)\\ \vdots \\ \mathrm{Q}(x_{d+1})\end{pmatrix} = \mathrm{V}\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_d\end{pmatrix} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_d\end{pmatrix} = \mathrm{B}\begin{pmatrix}\mathrm{Q}(x_1)\\ \mathrm{Q}(x_2)\\ \vdots \\ \mathrm{Q}(x_{d+1})\end{pmatrix} \quad \text{puisque } \mathrm{B}=\mathrm{V}^{-1}.$$

Ainsi, $|a_i| = \left|\sum_{j=1}^{d+1} b_{i-1,j}\mathrm{Q}(x_j)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{d+1}|b_{i-1,j}|\left|\mathrm{Q}(x_j)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{d+1}\beta\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} = (d+1)\beta\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}$, et donc : $\sup_{\mathrm{Q}\neq 0}\frac{\mathrm{N}(\mathrm{Q})}{\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}} \leqslant (d+1)\beta$.

Remarque. Nous venons de prouver que pour tout $\mathrm{Q}\in\mathscr{E}_d$, $\frac{1}{\beta(d+1)}\mathrm{N}(\mathrm{Q}) \leqslant \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} \leqslant \left(\sum_{i=0}^{d}\rho^i\right)\mathrm{N}(\mathrm{Q})$; on retrouve le fait que ces deux normes sont équivalentes.

Question 6.

a) Le polynôme $\mathrm{Q}=\mathrm{X}^d$ est unitaire, et $\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}=\sup_{z\in\mathrm{K}}|z|^d=\rho^d$. On en déduit que $0\leqslant m=\inf_{\mathrm{Q}\in\mathscr{U}_d}\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}\leqslant\rho^d$.

b) Posons $\mathscr{A}=\left\{\mathrm{Q}\in\mathscr{U}_d \;\middle|\; \|\mathrm{Q}_k\|\leqslant\rho^d\right\}$ et $\mathscr{B}=\left\{\mathrm{Q}\in\mathscr{U}_d \;\middle|\; \|\mathrm{Q}_k\|>\rho^d\right\}$. Nous avons $\mathscr{U}_d=\mathscr{A}\cup\mathscr{B}$ et nous savons que $\mathscr{A}\neq\emptyset$ puisque $\mathrm{X}^d\in\mathscr{A}$.

- Si $\mathscr{B}=\emptyset$, alors $\mathscr{A}=\mathscr{U}_d$ et $m=\inf_{\mathrm{Q}\in\mathscr{A}}\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}$;
- si $\mathscr{B}\neq\emptyset$, alors $m=\min\left(\inf_{\mathrm{Q}\in\mathscr{A}}\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}, \inf_{\mathrm{Q}\in\mathscr{B}}\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}\right)$. Mais $\inf_{\mathrm{Q}\in\mathscr{B}}\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}\geqslant\rho^d$ et on sait que $m\leqslant\rho^d$, donc $m=\inf_{\mathrm{Q}\in\mathscr{A}}\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}$.

c) L'application $f:\mathrm{Q}\mapsto a_d$ est une application continue car linéaire, et $\mathscr{U}_d=\left\{\mathrm{Q}\in\mathscr{E}_d \;\middle|\; f(\mathrm{Q})=1\right\}$ est donc fermée, puisque $\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. $\mathscr{A}$ est l'intersection de $\mathscr{U}_d$ et de la boule fermée de centre 0, de rayon ρ^d, donc est fermée (intersection de deux fermés) et bornée.

Or l'application $\mathrm{Q}\mapsto\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}$ est continue, donc est bornée sur $\mathscr{A}$, et atteint ses bornes, en particulier sa borne inférieure : il existe Q_0 dans $\mathscr{A}$ (et donc dans $\mathscr{U}_d$) tel que $\|\mathrm{Q}_0\|_{\mathrm{K}}=m$.

Troisième partie

Question 7. $\mathrm{Q}(z_0)=1$, il s'agit donc de trouver $z\in\mathbb{C}$ tel que $|\mathrm{Q}(z)|>1$. Posons $c_k=r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, et considérons alors $z=z_0+\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{k}}$. Alors $\mathrm{Q}(z)=1+r$, et donc $\left|\mathrm{Q}(z)\right|=1+r>1=\left|\mathrm{Q}(z_0)\right|$.

Question 8.

a) z_0 est racine de $\mathrm{Q}(\mathrm{X})-1$; notons k sa multiplicité. Alors $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = 1+(\mathrm{X}-z_0)^k \mathrm{M}(\mathrm{X})$, où M est un polynôme n'admettant pas z_0 pour racine.

Posons $c_k = \mathrm{M}(z_0) \neq 0$; alors z_0 est racine de $\dfrac{1}{c_k}\Big(\mathrm{M}(\mathrm{X})-c_k\Big)$, donc il existe un polynôme $\mathrm{R}(\mathrm{X})$ tel que $\mathrm{M}(\mathrm{X}) = c_k+c_k(\mathrm{X}-z_0)\mathrm{R}(\mathrm{X})$.

En reportant, on obtient : $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = 1+c_k(\mathrm{X}-z_0)^k + c_k(\mathrm{X}-z_0)^{k+1}\mathrm{R}(\mathrm{X})$.

b) Notons θ un argument de c_k ; alors $c_k = |c_k|\mathrm{e}^{i\theta}$. Posons alors $z = z_0 + r\,\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{k}}$; on a $(z-z_0)^k = r^k\,\mathrm{e}^{-i\theta} = |z-z_0|\mathrm{e}^{-i\theta}$ et donc : $\mathrm{Q}(z) = 1+|c_k|\,|z-z_0|^k + |c_k|\,|z-z_0|^k(z-z_0)\mathrm{R}(z)$.

c) Posons $z = z_0+\alpha r\,\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{k}}$, et cherchons une valeur de $\alpha \leqslant 1$ pour laquelle $|\mathrm{Q}(z)| > 1$.

Nous avons $\mathrm{Q}(z) = 1+|c_k|\alpha^k r^k\Big(1+(z-z_0)\mathrm{R}(z)\Big)$, et $\lim\limits_{\alpha\to 0}(z-z_0)\mathrm{R}(z) = 0$, donc il est possible de trouver $\alpha \leqslant 1$ tel que $\Big|(z-z_0)\mathrm{R}(z)\Big| \leqslant \dfrac{1}{2}$.Dans ces conditions, $\mathfrak{Re}\Big(1+(z-z_0)\mathrm{R}(z)\Big) \geqslant \dfrac{1}{2}$, donc $\mathfrak{Re}\Big(\mathrm{Q}(z)\Big) \geqslant 1+\dfrac{|c_k|\alpha^k r^k}{2} > 1$, ce qui prouve que $\Big|\mathrm{Q}(z)\Big| > 1 = \Big|\mathrm{Q}(z_0)\Big|$.

Question 9. Soit maintenant un polynôme non constant Q quelconque, et $z_0 \in \mathbb{C}$.
Si $\mathrm{Q}(z_0) = 0$, puisque Q n'est pas le polynôme nul, il ne prend qu'un nombre fini de racines dans la boule $\mathrm{B}(z_0, r)$; toute autre valeur z de cette boule vérifie donc : $\Big|\mathrm{Q}(z)\Big| > 0 = \Big|\mathrm{Q}(z_0)\Big|$.
Si $\mathrm{Q}(z_0) \neq 0$, il suffit d'appliquer la question 8 au polynôme $\dfrac{\mathrm{Q}(\mathrm{X})}{\mathrm{Q}(z_0)}$.

Question 10.

a) Puisque $\Big\{z \in \mathbb{C} \;\Big|\; |z| = 1\Big\} \subset \Big\{z \in \mathbb{C} \;\Big|\; |z| \leqslant 1\Big\}$, nous avons déjà : $\sup\limits_{|z|=1}\Big|\mathrm{Q}(z)\Big| \leqslant \sup\limits_{|z|\leqslant 1}\Big|\mathrm{Q}(z)\Big|$.

b) Réciproquement, l'ensemble $\Big\{z \in \mathbb{C} \;\Big|\; |z| \leqslant 1\Big\}$ est fermé et borné et l'application $z \mapsto \Big|\mathrm{Q}(z)\Big|$ continue, donc cette dernière est bornée et atteint ses bornes : il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| \leqslant 1$ et $\Big|\mathrm{Q}(z_0)\Big| = \sup\limits_{|z|\leqslant 1}\Big|\mathrm{Q}(z)\Big|$.

Mais si on avait $|z_0| < 1$, il existerait $r > 0$ tel que la boule $\mathrm{B}(z_0, r)$ de centre z_0, de rayon r soit incluse dans la boule unité $\mathrm{B}(0,1)$. Or d'après la question III.3, la boule $\mathrm{B}(z_0, r)$ contient des valeurs de z vérifiant : $\Big|\mathrm{Q}(z)\Big| > \Big|\mathrm{Q}(z_0)\Big|$, et ceci contredit le caractère maximal de $\Big|\mathrm{Q}(z_0)\Big|$ dans $\mathrm{B}(0,1)$.

Ainsi, $|z_0| = 1$, et alors : $\sup\limits_{|z|\leqslant 1}\Big|\mathrm{Q}(z)\Big| \leqslant \sup\limits_{|z|=1}\Big|\mathrm{Q}(z)\Big|$. D'où l'égalité de ces deux valeurs.

Question 11.

a) Si $\mathrm{Q} = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k \mathrm{X}^k$, posons $\widetilde{\mathrm{Q}} = \sum\limits_{k=0}^{d} a_{d-k}\mathrm{X}^k$. Alors $z^d\widetilde{\mathrm{Q}}\Big(\dfrac{1}{z}\Big) = z^d\sum\limits_{k=0}^{k} a_{d-k}\dfrac{1}{z^k} = \sum\limits_{k=0}^{d} a_{d-k}z^{d-k} = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k z^k = \mathrm{Q}(z)$.

b) Nous avons donc : $\sup\limits_{|z|\geqslant 1}\Big|\dfrac{\mathrm{Q}(z)}{z^d}\Big| = \sup\limits_{|z|\geqslant 1}\Big|\widetilde{\mathrm{Q}}\Big(\dfrac{1}{z}\Big)\Big| = \sup\limits_{|z'|\leqslant 1}\Big|\widetilde{\mathrm{Q}}(z')\Big|$ (en posant $z' = \dfrac{1}{z}$).

D'après la question précédente, $\sup\limits_{|z'|\leqslant 1}\Big|\widetilde{\mathrm{Q}}(z')\Big| = \sup\limits_{|z'|=1}\Big|\widetilde{\mathrm{Q}}(z')\Big|$. Mais lorsque $|z'| = 1$ on a $\Big|\widetilde{\mathrm{Q}}(z')\Big| = \Big|\mathrm{Q}\Big(\dfrac{1}{z'}\Big)\Big|$ donc : $\sup\limits_{|z'|=1}\Big|\widetilde{\mathrm{Q}}(z')\Big| = \sup\limits_{|z'|=1}\Big|\mathrm{Q}\Big(\dfrac{1}{z'}\Big)\Big| = \sup\limits_{|z|=1}\Big|\mathrm{Q}(z)\Big|$. D'où le résultat.

Question 12. Nous avons $\|\mathrm{Q}_0\|_{\mathrm{K}} = 1$. Pour prouver l'égalité demandée, il suffit de montrer que pour tout polynôme $\mathrm{Q} \in \mathscr{U}_d$ on a $\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} \geqslant 1$, soit : $\sup\limits_{|z|\leqslant 1}\Big|\mathrm{Q}(z)\Big| \geqslant 1$, ou encore, compte tenu de la question précédente : $\sup\limits_{|z|\geqslant 1}\Big|\dfrac{\mathrm{Q}(z)}{z^d}\Big| \geqslant 1$. Or lorsque x est un réel positif qui tend vers $+\infty$, on a : $\mathrm{Q}(x) \underset{+\infty}{\sim} x^d$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{Q}(x)}{x^d} = 1$, ce qui prouve que $\sup\limits_{|z|\geqslant 1}\Big|\dfrac{\mathrm{Q}(z)}{z^d}\Big| \geqslant 1$. On a donc bien $m = 1 = \|\mathrm{Q}_0\|_{\mathrm{K}}$.