# Contrôle de mathématique

Durée : 4 heures

---

Ce contrôle est constitué d'un exercice et d'un problème indépendants.

# Exercice : série des restes

## Partie I. Deux résultats préliminaires

**Question 1.** Soit $\theta$ un réel strictement supérieur à 1. Justifier l'existence de la quantité $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\theta}$ et en trouver un équivalent lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Question 2.** On considère deux séries convergentes $\sum x_n$ et $\sum y_n$ à termes généraux positifs, vérifiant : $x_n \sim y_n$. Montrer que lorsque $n$ tend vers $+\infty$ on a : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} x_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} y_k$.

## Partie II. Étude du reste d'une série alternée

Dans cette partie, on s'intéresse au reste de la série alternée $\sum \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, ce qui nous amène à poser pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}.$$

**Question 3.** On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Montrer que la suite de terme général $d_n = u_n - \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ est décroissante et minorée, et en déduire l'existence d'un réel $\ell$ tel que $\lim_{n\to+\infty}\left(u_n - \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\right) = \ell + 2$.

**Question 4.** On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - 2\sqrt{n} - \ell$.

*a)* Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - n_n$, et en déduire que $v_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

*b)* Prouver que $v_n - \frac{1}{2\sqrt{n}} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, et en déduire que $u_n$ vérifie :

$$u_n = \mathrm{A}\sqrt{n} + \mathrm{B} + \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right),$$

A, B, C désignant des constantes réelles à déterminer.

**Question 5.** On pose $\mathrm{S} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

*a)* Exprimer $r_{2n}$ en fonction de S et des sommes partielles $u_n$ et $u_{2n}$.

*b)* En déduire qu'il existe deux réels $k$ et $k'$, que l'on déterminera, tels que : $r_{2n} = k + \frac{k'}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

**Question 6.** Exprimer S en fonction de $\ell$ et déterminer la nature de la série de terme général $r_n$.

# Problème : transformation d'Euler (d'après X MP 2011)

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles, et on considère l'endomorphisme $\Delta$ de E qui à toute suite $u = (u_n)_{n\in/\mathbb{N}}$ associe la suite $\Delta u$ de terme général $(\Delta u)_n = u_{n+1} - u_n$.

## Partie I. Suites complètement monotones

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on note $\Delta^p$ le $p$-ième itéré de $\Delta$ défini par $\Delta^p = \Delta \circ \Delta^{p-1}$, et par convention $\Delta^0$ est l'identité de E.
On dit qu'une suite $(u_n)$ de E est *complètement monotone* si pour tous entiers naturels $p$ et $n$ on a

$$(-1)^p(\Delta^p u)_n > 0.$$

**Question 7.** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. On considère la suite de terme général $u_n = f(n)$.

*a)* Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un réel $x$ dans l'intervalle $]n, n+1[$ tel que $(\Delta u)_n = f'(x)$.

*b)* Montrer plus généralement que pour tout entier $p \geqslant 1$ et tout entier $n$ il existe un réel $x$ dans l'intervalle $]n, n+p[$ tel que

$$(\Delta^p u)_n = f^{(p)}(x).$$

*On pourra raisonner par récurrence sur p en considérant la fonction* $g : x \mapsto f(x+1) - f(x)$ *et la suite de terme général* $v_n = g(n)$.

**Question 8.** On considère la suite de terme général $a_n = \dfrac{1}{n+1}$. Montrer que la suite $(a_n)$ est complètement monotone.

**Question 9.** Démontrer que pour tout $p \geqslant 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(-1)^p(\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} u_{n+k}.$$

*On pourra introduire l'endomorphisme* $\delta$ *de* E *qui à une suite* $u = (u_n)$ *associe la suite* $\delta u$ *de terme général* $(\delta u)_n = u_{n+1}$.

**Question 10.** Soit $b \in ]0,1[$. On considère la suite de terme général $b_n = b^n$. Calculer $(\Delta^p b)_n$ pour tous entiers naturels $n$ et $p$ et en déduire que la suite $(b_n)$ est complètement monotone.

Soit $\omega$ une fonction continue et positive sur $[0,1]$, non identiquement nulle. Jusqu'à la fin de la première partie, on considère la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \omega(t)\,\mathrm{d}t$.

**Question 11.**

*a)* Justifier la convergence de la série de terme général $(-1)^k u_k$.

*b)* Prouver ensuite que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

**Question 12.** Montrer que la suite $(u_n)$ est complètement monotone.

## Partie II. Transformée d'Euler

Dans cette partie, on considère une suite réelle $(u_n)$ telle que la série de terme général $(-1)^n u_n$ soit convergente, et on note S sa somme. **On ne suppose aucune autre propriété particulière de cette suite $(u_n)$.** Le but de cette partie est de démontrer que :

$$\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p u)_0$$

On dit que la série $\sum \dfrac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0$ est la *transformée d'Euler* de la série $\sum (-1)^k u_k$.

**Question 13.** Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (\Delta^p u)_n = 0$.

**Question 14.** Montrer que pour toute suite $(r_n)$ de limite nulle on a $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{1}{2^p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} r_k = 0$. *On pourra s'inspirer de la preuve du théorème de Cesàro.*

**Question 15.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1} u)_n\right)$$

**Question 16.**

*a)* Montrer que pour tous entiers naturels $p$ et $n$ on a $2(\Delta^p u)_n + (\Delta^{p+1} u)_n = (\Delta^p u)_n + (\Delta^p u)_{n+1}$.

*b)* Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a

$$\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0 = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1} u)_n\right)$$

**Question 17.**

*a)* Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\mathrm{E}_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0$. Montrer que

$$\mathrm{S} - \mathrm{E}_n = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}\sum_{k=p}^{+\infty}(-1)^k u_k.$$

*b)* En déduire que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0$ converge et que sa somme est égale à S.

**Question 18.**

*a)* En appliquant la question 11 à une fonction $\omega$ judicieusement choisie, montrer que $\ln 2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+k}$.

*b)* En déduire que $\ln 2 = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2^{p+1}(p+1)}$.

♦ ♦
♦