Corrigé : contrôle de mathématique

Exercice : série des restes

Partie I. Deux résultats préliminaires

Question 1. La quantité $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\theta}$ est définie car il s'agit du reste d'une somme de Riemann convergente (puisque $\theta>1$). Par comparaison à une intégrale on obtient :

$$\frac{1}{\theta-1}\Big(\frac{1}{(n+1)^{\theta-1}}-\frac{1}{(p+1)^{\theta-1}}\Big)=\int_{n+1}^{p+1}\frac{\mathrm{d}x}{x^\theta}\leqslant\sum_{k=n+1}^{p}\frac{1}{k^\theta}\leqslant\int_n^p\frac{\mathrm{d}x}{x^\theta}=\frac{1}{\theta-1}\Big(\frac{1}{n^{\theta-1}}-\frac{1}{p^{\theta-1}}\Big)$$

et en faisant tendre p vers $+\infty$: $\displaystyle\frac{1}{\theta-1}\times\frac{1}{(n+1)^{\theta-1}}\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\theta}\leqslant\frac{1}{\theta-1}\times\frac{1}{n^{\theta-1}}$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\theta}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\theta-1}\times\frac{1}{n^{\theta-1}}$.

Question 2. Traduisons la propriété $x_n\sim y_n$: pour tout $\epsilon>0$ il existe un rang N à partir duquel $(1-\epsilon)x_k\leqslant y_k\leqslant(1+\epsilon)x_k$, et sommons cet encadrement pour $k\geqslant n+1$. On obtient : $\displaystyle(1-\epsilon)\sum_{k=n+1}^{+\infty}x_k\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}y_k\leqslant(1+\epsilon)\sum_{k=n+1}^{+\infty}x_k$, ce qui traduit l'équivalence des restes.

Partie II. Étude du reste d'une série alternée

Question 3. Posons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle d_n=u_n-\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$. Alors $\displaystyle d_{n+1}-d_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$.
La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ étant décroissante, nous avons : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{k+1}}\leqslant\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{k}}$. La première inégalité prouve que la suite (d_n) est décroissante. Par ailleurs, on obtient en faisant la somme :

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\leqslant\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}}\iff\frac{1}{\sqrt{n}}\leqslant d_n\leqslant 1.$$

La suite (d_n) est donc minorée par 0 ; elle converge. On pose $\ell=\lim\limits_{+\infty}d_n-2$.

Question 4.

a) On calcule
$$\begin{aligned}v_{n+1}-v_n&=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-1/2}-2\sqrt{n}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{1/2}+2\sqrt{n}\\&=\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(1-\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)-2\sqrt{n}\Big(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+\mathrm{o}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)+2\sqrt{n}\\&=\frac{-1}{4n\sqrt{n}}+\mathrm{o}\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big).\end{aligned}$$
Ainsi, $v_{n+1}-v_n\sim\dfrac{-1}{4n\sqrt{n}}$. La série $\sum\dfrac{1}{4n\sqrt{n}}$ est à terme général positif et convergente (série de Riemann), ce qui nous autorise à affirmer que la série $\sum(v_{n+1}-v_n)$ converge et que les restes de ces deux séries sont équivalents (question 2) :

$$-v_{n+1}=\sum_{k=n+1}^{+\infty}(v_{k+1}-v_k)\sim-\frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k\sqrt{k}}.$$

On applique ensuite la question 1 : $v_{n+1}\sim\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, soit encore : $v_n\sim\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

b) Si on pousse plus loin le développement limité de $v_{n+1}-v_n$ on obtient : $v_{n+1}-v_n = \dfrac{-1}{4n\sqrt{n}} + \dfrac{1}{4n^2\sqrt{n}} + \mathrm{o}\Big(\dfrac{1}{n^2\sqrt{n}}\Big)$. En posant $w_n = v_n - \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ on obtient : $w_{n+1}-w_n \sim \dfrac{1}{16n^2\sqrt{n}}$. La série $\sum \dfrac{1}{16n^2\sqrt{n}}$ est à terme général positif et convergente (série de Riemann) ; on en déduit que la série $\sum(w_{n+1}-w_n)$ converge et que les restes sont équivalents :

$$-w_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(w_{k+1}-w_k) \sim \frac{1}{16}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2\sqrt{k}} \quad \text{soit avec la question 1 : } w_n \sim \frac{-1}{24n\sqrt{n}}.$$

Nous avons donc $v_n = \dfrac{1}{2\sqrt{n}} + \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\Big)$ puis $u_n = 2\sqrt{n} + \ell + \dfrac{1}{2\sqrt{n}} + \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\Big)$.

Question 5.

a) Nous avons $r_{2n} = \mathrm{S} - \mathrm{S}_{2n}$, où $\mathrm{S}_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$.

Or $\mathrm{S}_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k-1}}$ et $u_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k}} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k-1}}$ donc $\mathrm{S}_{2n} + u_{2n} = \sqrt{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} = \sqrt{2}u_n$.
Ainsi, $r_{2n} = \mathrm{S} + u_{2n} - \sqrt{2}u_n$.

b) À l'aide du développement asymptotique obtenu à la question 4 on peut écrire :

$$r_{2n} = \mathrm{S} + 2\sqrt{2n} + \ell + \frac{1}{2\sqrt{2n}} - \sqrt{2}\Big(2\sqrt{n} + \ell + \frac{1}{2\sqrt{n}}\Big) + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big) = \mathrm{S} + (1-\sqrt{2})\ell - \frac{1}{2\sqrt{2n}} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big).$$

Question 6. Sachant que (r_n) tend vers 0 (c'est le reste d'une série convergente) nous avons nécessairement $\mathrm{S}+(1-\sqrt{2})\ell = 0$, c'est à dire : $\mathrm{S} = (\sqrt{2}-1)\ell$.
Il en résulte que $r_{2n} = \dfrac{-1}{2\sqrt{2n}} + \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\Big)$. Par ailleurs,

$$r_{2n+1} = r_{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{2\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{2}\underbrace{\Big(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\Big)}_{\mathrm{O}(1/n\sqrt{n})} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big) = \frac{1}{2\sqrt{2n+1}} + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big).$$

Nous avons donc prouvé que $r_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{n}} + \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\Big)$. La série $\sum\Big(r_n - \dfrac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{n}}\Big)$ est absolument convergente car dominée par une série de Riemann ; la série $\sum\dfrac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{n}}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées ; il en résulte que la série $\sum r_n$ est convergente.

Problème : transformation d'Euler (d'après X MP 2011)

Partie I. Suites complètement monotones

Question 7.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\Delta u)_n = f(n+1) - f(n)$; f étant de classe $\mathscr{C}^1$ on peut lui appliquer l'égalité des accroissements finis : il existe $x \in]n, n+1[$ tel que $f(n+1) - f(n) = f'(x)$.

b) Raisonnons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.
– le cas $p = 1$ a été traité à la question précédente.
– Si $p \geqslant 1$, supposons le résultat acquis au rang $p-1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Considérons la fonction $g : x \mapsto f(x+1) - f(x)$ ainsi que la suite (v_n) de terme général $v_n = g(n)$. g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ donc on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe $y \in]n, n+p-1[$ tel que $(\Delta^{p-1}v)_n = g^{(p-1)}(y)$.
Mais d'une part $v = \Delta u$ donc $\Delta^{p-1}v = \Delta^p u$ et d'autre part $g^{(p-1)}(y) = f^{(p-1)}(y+1) - f^{(p-1)}(y)$ donc d'après l'égalité des accroissements finis il existe $x \in]y, y+1[$ tel que $g^{(p-1)}(y) = f^{(p)}(x)$.
On a $n < y < n+p-1$ et $y < x < y+1$ donc $n < x < n+p$; le résultat est bien acquis au rang p, la récurrence se propage.

Question 8. Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$. Cette fonction des de classe $\mathscr{C}^\infty$ et il est aisé de prouver par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que pour tout $x > 0$, $f^{(p)}(x) = \dfrac{(-1)^p p!}{(x+1)^{p+1}}$.

D'après la question précédente, pour tout p et n dans $\mathbb{N}$ il existe $x \in]n, n+p[$ tel que $(\Delta^p a)_n = f^{(p)}(x) = \dfrac{(-1)^p p!}{(x+1)^{p+1}}$ donc $(-1)^p(\Delta^p u)_n = \dfrac{p!}{(x+1)^{p+1}} > 0$, ce qui prouve que la suite (a_n) est complètement monotone.

Question 9. Considérons l'endomorphisme δ de E qui à toute suite (u_n) de E associe la suite de terme général $(\delta u)_n = u_{n+1}$. On a $\Delta = \delta - \mathrm{Id}_E$ donc d'après la formule du binôme, $\Delta^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} \delta^k$. Or à l'évidence $(\delta^k u)_n = u_{n+k}$ donc $(\Delta^p u)_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} u_{n+k}$ et ainsi, $(-1)^p(\Delta^p u)_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} u_{n+k}$.

Question 10. D'après la question précédente, $(-1)^p(\Delta^p b)_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k b^{n+k} = b^n(1-b)^p$. Il en résulte que si $b \in]0,1[$ la suite (b^n) est complètement monotone.

Question 11.

a) Puisque ω est à valeurs positives, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, $t^{n+1}\omega(t) \leqslant t^n \omega(t)$ ce qui donne en intégrant : $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite (u_n) est décroissante.

De plus, ω est continue sur le segment $[0,1]$ donc bornée : en notant M sa borne supérieure on a $0 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{M} \displaystyle\int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{M}}{n+1}$ donc $\lim u_n = 0$.

On peut donc appliquer le critère spécial relatif aux séries alternée pour conclure : la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

b) On calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k = \int_0^1 \omega(t) \sum_{k=0}^{n} (-t)^k \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t} \,\mathrm{d}t + (-1)^n \int_0^1 \frac{\omega(t) t^{n+1}}{1+t} \,\mathrm{d}t$.

Or $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{\omega(t) t^{n+1}}{1+t} \,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M} \int_0^1 t^{n+1} \,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{M}}{n+2}$ et en passant à la limite : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t} \,\mathrm{d}t$.

Question 12. D'après la formule établie à la question 9 on a

$$(-1)^p(\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} u_{n+k} = \int_0^1 t^n \omega(t) \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k t^k \,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^n (1-t)^p \omega(t) \,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

De plus, si on avait $(-1)^p(\Delta^p u)_n = 0$ ceci signifierait que pour tout $t \in]0,1[$, $\omega(t) = 0$, ce qui n'est pas possible car ω est supposée non identiquement nulle. On peut conclure : la suite (u_n) est complètement monotone.

Partie II. Transformée d'Euler

Question 13. D'après la formule établie à la question 9, $(\Delta^p u)_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k}$. Lorsque l'entier p est fixé, il s'agit d'une combinaison linéaire *finie* de suites qui toutes tendent vers 0 (en effet, $\sum (-1)^n u_n$ converge donc $\lim u_n = 0$), donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (\Delta^p u)_n = 0$.

Question 14. Considérons un réel $\epsilon > 0$; par hypothèse il existe un rang N à partir duquel $|r_k| \leqslant \epsilon$. Ainsi, pour tout $p \geqslant \mathrm{N}$,

$$\Big| \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} r_k \Big| \leqslant \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \binom{p}{k} |r_k| + \frac{\epsilon}{2^p} \sum_{k=\mathrm{N}}^{p} \binom{p}{k} \leqslant \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \frac{1}{2^p} \binom{p}{k} |r_k| + \frac{\epsilon}{2^p} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \frac{1}{2^p} \binom{p}{k} |r_k| + \epsilon$$

Pour $k \in [\![0, \mathrm{N}-1]\!]$ fixé, considérons la suite $\alpha_p = \dfrac{1}{2^p} \dbinom{p}{k}$. On calcule $\dfrac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p} = \dfrac{p+1}{2(p+1-k)}$ donc $\displaystyle\lim_{p \to +\infty} \frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p} = \frac{1}{2} < 1$ et d'après le critère de d'Alembert, $\lim \alpha_p = 0$.

Ceci montre que $\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{2^p}\binom{p}{k}|r_k|=0$. Il existe donc un rang $N'\geqslant N$ à partir duquel $\left|\frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}r_k\right|\leqslant 2\epsilon$, ce qui prouve que $\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}r_k=0$.

Question 15. Soit $p\in\mathbb{N}$. Par télescopage, $\sum_{k=0}^{p-1}\Big(\frac{(-1)^k}{2^k}(\Delta^k u)_n-\frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}}(\Delta^{k+1}u)_n\Big)=(\Delta^0 u)_n-\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n=u_n-\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n$.
Il s'agit donc de montrer que $\lim_{p\to+\infty}\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n=0$. Or d'après la question 9, $\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n=\frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}u_{n+k}$ et puisque la série $\sum(-1)^n u_n$ converge la suite (u_n) tend vers 0. Ainsi, à n fixé, $\lim_{k\to+\infty}(-1)^k u_{n+k}=0$. On peut donc appliquer la question 14 et conclure : $\lim_{p\to+\infty}\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n=0$.

Question 16.

a) On a $\Delta^{p+1}u=\Delta(\Delta^p u)$ donc $(\Delta^{p+1}u)_n=(\Delta^p u)_{n+1}-(\Delta^p u)_n$. Ainsi, $2(\Delta^p u)_n+(\Delta^{p+1}u)_n=(\Delta^p u)_n+(\Delta^p u)_{n+1}$.

b) Soit $N\in\mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\Big(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n-\frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_n\Big)=\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\Big(2(\Delta^p u)_n+(\Delta^{p+1}u)_n\Big)=\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\Big((\Delta^p u)_n+(\Delta^p u)_{n+1}\Big).$$

Par télescopage, $\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\Big((\Delta^p u)_n+(\Delta^p u)_{n+1}\Big)=\sum_{n=0}^{N}\Big((-1)^n(\Delta^p u)_n-(-1)^{n+1}(\Delta^p u)_{n+1}\Big)=(\Delta^p u)_0-(-1)^{N+1}(\Delta^p u)_{N+1}$.
Or d'après la question 13, $\lim_{N\to+\infty}(\Delta^p u)_{N+1}=0$ donc en faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient bien :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\Big(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n-\frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_n\Big)=\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0$$

Question 17.

a) Sachant qu'une somme finie de séries convergentes est convergente, la question précédente permet d'écrire :

$$E_n=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\sum_{p=0}^{n}\Big(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_k-\frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_k\Big)$$

La question 15 nous permet en outre d'écrire : $S=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\sum_{p=0}^{+\infty}\Big(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_k-\frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_k\Big)$.

Ainsi, $S-E_n=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\sum_{p=n+1}^{+\infty}\Big(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_k-\frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_k\Big)$.

Nous avons déjà montré à la question 15 que $\lim_{p\to+\infty}\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_k=0$ donc par télescopage

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty}\Big(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_k-\frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_k\Big)=\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(\Delta^{n+1}u)_k-0$$

et $S-E_n=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+n+1}}{2^{n+1}}(\Delta^{n+1}u)_k$. En appliquant la formule de la question 9, il vient enfin :

$$S-E_n=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}(-1)^p u_{k+p}=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+p}u_{k+p}=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p}\sum_{k=p}^{+\infty}(-1)^k u_k$$

b) Il s'agit maintenant de faire tendre n vers $+\infty$. Pour se faire, on pose $r_p = \sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k u_k$. S'agissant du reste d'une série convergente on a $\lim_{p\to+\infty} r_p = 0$ donc on peut appliquer la question 14 et conclure : $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S} - \mathrm{E}_n = 0$, ce qui prouve que la suite (E_n) converge et donc que $\mathrm{S} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0$.

Question 18.

a) Appliquons la question 11 à la fonction $\omega : t \mapsto 1$. On a $u_n = \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$ et $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2$ donc $\ln 2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k}$.

b) Appliquons maintenant le résultat établi dans cette partie : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0$.

Il reste à appliquer la formule de la question 9 :

$$\begin{aligned}
(-1)^p(\Delta^p u)_0 &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}(-1)^k u_k = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k \binom{p+1}{k+1} \\
&= \frac{1}{p+1}\Big(1 - \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\binom{p+1}{k}\Big) = \frac{1}{p+1}\big(1-(1-1)^{p+1}\big) = \frac{1}{p+1}
\end{aligned}$$

et ainsi, $\ln 2 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}(p+1)}$.