Équation de Sturm-Liouville (X MP 2008 - extrait)

Durée : libre

Ce problème est consacré à l'étude d'une équation différentielle avec paramètre. On désigne par $\mathscr{C}^\infty([0,1])$ l'espace des fonctions réelles de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$.

Première partie

Dans cette première partie, étant donné deux fonctions p et q de $\mathscr{C}^\infty([0,1])$, on désigne par $\mathrm{A}_{p,q}$ l'endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty([0,1])$ défini par

$$\mathrm{A}_{p,q}(y) = y'' + py' + qy$$

et par $(\mathrm{D}_{p,q})$ l'équation différentielle sur $[0,1]$: $\mathrm{A}_{p,q}(y) = 0$.

Question 1. Soit y une solution non identiquement nulle de $(\mathrm{D}_{p,q})$.

a) Montrer que les fonctions y et y' ne s'annulent pas simultanément.

b) En déduire que les zéros de y sont isolés. *Nous admettrons que ceci implique que y n'a qu'un nombre fini de zéros sur* $[0,1]$.

Question 2. Soit y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de $(\mathrm{D}_{p,q})$; on suppose que y_1 admet au moins deux zéros et on note a et b deux zéros consécutifs.

a) Montrer que y_2 admet au moins un zéro dans l'intervalle ouvert $]a,b[$. *On pourra considérer le wronskien* W *de y_1 et y_2.*

b) La fonction y_2 peut-elle avoir plusieurs zéros dans $]a,b[$?

Étant donné deux fonctions u et v de $\mathscr{C}^\infty([0,1])$, u ne s'annulant en aucun point, on désigne par $\mathrm{B}_{u,v}$ l'endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty([0,1])$ défini par

$$\mathrm{B}_{u,v}(y) = (uy')' + vy$$

et par $(\mathrm{E}_{u,v})$ l'équation différentielle sur $[0,1]$: $\mathrm{B}_{u,v}(y) = 0$.

Question 3.

a) Soit y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de $(\mathrm{D}_{p,q})$ et soit W leur wronskien. Vérifier la relation

$$y_1 \mathrm{B}_{u,v}(y_2) - y_2 \mathrm{B}_{u,v}(y_1) = (u' - up)\mathrm{W}$$

b) Montrer que, pour tout couple (p,q), il existe des couples (u,v) tels que $\operatorname{Ker} \mathrm{A}_{p,q} = \operatorname{Ker} \mathrm{B}_{u,v}$ et déterminer tous ces couples (u,v).

Question 4. On se donne trois fonctions u, v_1, v_2 de $\mathscr{C}^\infty([0,1])$ et on suppose

$$u(x) > 0 \quad \text{et} \quad v_2(x) < v_1(x) \text{ pour tout } x \in [0,1]$$

Pour $i = 1,2$, on note y_i une solution non identiquement nulle de l'équation (E_{u,v_i}) ; on suppose que y_2 admet au moins deux zéros et on note a et b deux zéros consécutifs.

a) Vérifier la relation

$$\Big[u y_1 y_2'\Big]_a^b = \int_a^b \Big(v_1(x) - v_2(x)\Big) y_1(x) y_2(x)\,\mathrm{d}x$$

On pourra considérer $\displaystyle\int_a^b \Big(y_1 \mathrm{B}_{u,v_2}(y_2) - y_2 \mathrm{B}_{u,v_1}(y_1)\Big)\mathrm{d}x$.

b) Montrer que y_1 admet au moins un zéro dans l'intervalle $]a,b[$. *On pourra procéder par l'absurde.*

Deuxième partie

Dans toute la suite du problème on note r une fonction de $\mathscr{C}^\infty([0,1])$; pour tout nombre réel λ on considère l'équation différentielle sur $[0,1]$:

$$(\mathrm{D}_\lambda) \qquad y'' + (\lambda - r)y = 0$$

On note y_λ l'unique solution de (D_λ) satisfaisant $y_\lambda(0) = 0$, $y'_\lambda(0) = 1$, et E_λ l'espace vectoriel (éventuellement réduit à zéro) des solutions de (D_λ) satisfaisant $y(0) = y(1) = 0$; si cet espace n'est pas réduit à zéro, on dit que λ est *valeur propre*.

Question 5.

a) Quelles sont les valeurs possibles de $\dim \mathrm{E}_\lambda$?

b) Démontrer l'équivalence des conditions $\mathrm{E}_\lambda \neq \{0\}$ et $y_\lambda(1) = 0$.

Question 6. Démontrer les assertions suivantes :

a) Toute valeur propre est supérieure ou égale à $\inf_{x \in [0,1]} r(x)$.

b) Si $y_1 \in \mathrm{E}_{\lambda_1}, y_2 \in \mathrm{E}_{\lambda_2}$ avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors $\displaystyle\int_0^1 y_1(x) y_2(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

♦ ♦
♦