Polynômes de Tchebychev orthogonaux

Durée : libre

Dans tout le problème, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On conviendra de confondre un polynôme avec la fonction polynomiale associée.

Première partie

On définit par récurrence une suite de polynômes $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide des relations :

$$\mathrm{T}_0 = 1,\ \mathrm{T}_1 = \mathrm{X}, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{T}_{n+2} = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n.$$

Question 1. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le degré, la parité, et le coefficient dominant de T_n.

Question 2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a : $\mathrm{T}_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

Question 3. Déterminer les racines du polynômes T_n, en précisant leurs multiplicités respectives.

Question 4. Montrer que pour tout $f \in \mathrm{E}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$.

Étant donné deux éléments f et g de E, on peut donc définir : $\langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Question 5. Montrer que ceci définit un produit scalaire sur E. On notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

Question 6. Étant donné $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\langle \mathrm{T}_p \mid \mathrm{T}_q\rangle$ (on distinguera les cas $p \neq q$, $p = q \neq 0$, et $p = q = 0$).

Question 7. Réciproquement, montrer que si (P_n) est une suite de polynômes *unitaires* (autrement dit de coefficient dominant égal à 1) vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \deg \mathrm{P}_n = n$$
$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p \neq q \Rightarrow \langle \mathrm{P}_p \mid \mathrm{P}_q\rangle = 0$$

alors $\mathrm{P}_0 = \mathrm{T}_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{P}_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}\mathrm{T}_n$.

Deuxième partie

Soit $f \in \mathrm{E}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n(f) = \dfrac{\langle f \mid \mathrm{T}_n\rangle}{\langle \mathrm{T}_n \mid \mathrm{T}_n\rangle}$ et $\mathrm{P}_n(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k(f)\mathrm{T}_k$.

Question 8. Montrer que pour tout polynôme $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on a $\mathrm{P}_n(\mathrm{Q}) = \mathrm{Q}$.

Question 9. Soit $f \in \mathrm{E}$. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout polynôme $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on a : $\|f - \mathrm{P}_n(f)\| \leqslant \|f - \mathrm{Q}\|$. Dans quel cas a-t-on égalité ?

Question 10. On admet l'existence d'une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur $[-1,1]$. Prouver alors que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|f - \mathrm{P}_n(f)\| = 0$.

Question 11. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|\mathrm{P}_n(f)\|^2 = \|f\|^2$.

En déduire que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k(f)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et que :

$$2c_0(f)^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(f)^2 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Question 12. *Application*. On pose dans cette question uniquement : $\forall t \in [-1,1]$, $f(t) = \sqrt{1-t^2}$.

Appliquer la formule précédente et en déduire la valeur de la somme : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

Troisième partie

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$, et on note $x_0 = \cos\theta_0, x_1 = \cos\theta_1, \dots, x_n = \cos\theta_n$ les racines de T_{n+1}, avec $0 < \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n < \pi$.

Question 13. Montrer l'existence d'une unique famille $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ telle que :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}], \qquad \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{P}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{P}(x_k). \tag{1}$$

Indication : on pourra faire intervenir les polynômes d'interpolation de Lagrange.

Question 14. En effectuant une division euclidienne par le polynôme T_{n+1}, montrer que l'égalité (1) est en fait valable pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_{2n+1}[\mathrm{X}]$.

Question 15. Montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\lambda_k = \dfrac{1}{\mathrm{T}'_{n+1}(x_k)} \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{T}_{n+1}(t)}{(t-x_k)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$.

Question 16. Dans cette question, on fixe $k \in [\![0,n]\!]$, et on pose pour tout $j \in [\![0,n+1]\!]$, $\alpha_j = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(j\theta) - \cos(j\theta_k)}{\cos\theta - \cos\theta_k}\,\mathrm{d}\theta$.

Justifier avec soin l'existence de cette intégrale, puis calculer $\alpha_{j+1} - 2\cos(\theta_k)\alpha_j + \alpha_{j-1}$ pour $j \in [\![1,n]\!]$.

Question 17. En déduire la valeur de α_{n+1}, puis celle de λ_k.