Corrigé : polynômes de Tchebychev orthogonaux

Première partie

Question 1. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que T_n est de degré n, a même parité que n (autrement dit que $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$), et son coefficient dominant vaut 2^{n-1}.

- C'est clair si $n = 1$ ou $n = 2$, car $T_1 = X$ et $T_2 = 2X^2 - 1$.
- Si $n \geqslant 3$, supposons le résultat acquis aux rangs $n-1$ et $n-2$. Alors :
  - $\deg XT_{n-1} = n$ et $\deg T_{n-2} = n-2$, donc $\deg T_n = n$;
  - par hypothèse de récurrence, $T_{n-1}(-X) = (-1)^{n-1}T_{n-1}(X)$ et $T_{n-2}(-X) = (-1)^{n-2}T_{n-2}(X)$, donc :
  $$T_n(-X) = 2(-X)T_{n-1}(-X) - T_{n-2}(-X) = 2X(-1)^n T_{n-1}(X) - (-1)^n T_{n-2}(X) = (-1)^n T_n(X)$$
  - enfin, le coefficient dominant de XT_{n-1} est égal à 2^{n-1} ; c'est donc aussi celui de T_n.

  La récurrence se propage.

Question 2. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$.

- C'est clair si $n = 0$ ou $n = 1$.
- Si $n \geqslant 2$, supposons le résultat acquis aux rangs $n-1$ et $n-2$. Dans ces conditions :
  $$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos\theta) = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta = \cos n\theta \qquad \left(\text{car } \cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}\right)$$

  La récurrence se propage.

Question 3. Posons $x_k = \cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. Alors $T_n(x_k) = 0$, et $x_0, \dots, x_{n-1}$ sont des racines distinctes de T_n. Étant de degré n, il n'en possède pas d'autres, et ces racines sont toutes simples.

Question 4. La fonction f est continue sur le segment $[-1, 1]$, donc bornée. Ainsi,
$$\forall t \in]-1, 1[, \quad \left|\frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{1-t^2}}.$$
Cette dernière fonction est intégrable sur $]-1, 1[$ car $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin b - \arcsin a \underset{\substack{a\to-1\\ b\to 1}}{\longrightarrow} \pi$; on en déduit l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ sur $]-1, 1[$.

Question 5. La linéarité, la symétrie, et la positivité de $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$ sont évidentes. Considérons $f \in E$ tel que $\langle f \mid f\rangle = 0$, soit : $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{f(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 0$. S'il existait $\alpha \in]-1, 1[$ tel que $f(\alpha) \neq 0$, la continuité de f entraînerait l'existence d'un segment $[u, v]$ inclus dans $]-1, 1[$ sur lequel on aurait : $\forall t \in [u, v]$, $f(t)^2 > 0$, ce qui conduirait à :
$$0 < \int_u^v \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \leqslant \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,$$
ce qui n'est pas. f est donc nulle sur $]-1, 1[$, puis sur $[-1, 1]$ par continuité.

Question 6. Effectuons le changement de variable $t = \cos\theta$. Alors :
$$\langle T_p \mid T_q\rangle = \int_0^\pi T_p(\cos\theta)T_q(\cos\theta)\,d\theta = \int_0^\pi \cos(p\theta)\cos(q\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\cos\left(\frac{p+q}{2}\theta\right) + \cos\left(\frac{p-q}{2}\theta\right)\right)d\theta$$

- Si $p \neq$, alors $p + q \neq 0$ et $p - q \neq 0$, donc $\langle T_p \mid T_q\rangle = \left[\dfrac{1}{p+q}\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\theta\right) + \dfrac{1}{p-q}\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\theta\right)\right]_0^\pi = 0$.
- Si $p = q \neq 0$, alors $p + q \neq 0$, et $\langle T_p \mid T_q\rangle = \left[\dfrac{1}{p+q}\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\theta\right) + \dfrac{\theta}{2}\right]_0^\pi = \dfrac{\pi}{2}$.
- Si $p = q = 0$, alors $\langle T_0 \mid T_0\rangle = \displaystyle\int_0^\pi d\theta = \pi$.

Question 7. Le procédé de Schmidt appliqué à la base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ montre l'existence d'une unique famille orthonormée $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{aligned}&(i)\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{Vect}(1,X,\ldots,X^n)=\mathrm{Vect}(Q_0,Q_1,\ldots,Q_n)\,;\\&(ii)\quad \forall n\in\mathbb{N},\ \langle X^n \mid Q_n\rangle>0.\end{aligned}$$

La condition (i) implique immédiatement par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\deg Q_n=n$; la condition (ii) que le coefficient dominant de Q_n est strictement positif. En effet, si on désigne par α_n ce coefficient, alors $(Q_n-\alpha_n X^n)\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $\langle Q_n \mid Q_n-\alpha_n X^n\rangle=0 \iff \alpha_n\langle X^n \mid Q_n\rangle=\|Q_n\|^2>0$.
On en déduit (de par l'unicité de la suite (Q_n)) : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{T_n}{\|T_n\|}=Q_n$ et $\dfrac{P_n}{\|P_n\|}=Q_n$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe donc $\lambda_n>0$ tel que $P_n=\lambda_n T_n$, et la considération du coefficient dominant donne $P_0=T_0$ et $P_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}T_n$ pour $n\geqslant 1$.

Deuxième partie

Question 8. $(T_0,T_1,\ldots,T_n)$ étant une base de $\mathbb{R}_n[X]$, tout polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$ s'écrit de manière unique sous la forme : $Q=\sum_{j=0}^{n} a_j T_j$. Alors $\langle Q \mid T_k\rangle=\sum_{j=0}^{n} a_j\langle T_j \mid T_k\rangle=a_j\langle T_k \mid T_k\rangle$, donc $a_k=c_k(Q)$, et $Q=\sum_{k=0}^{n} c_k(Q)T_k=P_n(Q)$.

Question 9. On constate que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $\langle P_n(f) \mid T_k\rangle=c_k(f)\langle T_k \mid T_k\rangle=\langle f \mid T_n\rangle$, soit : $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\langle f-P_n(f) \mid T_k\rangle=0$. $(T_0,\ldots,T_n)$ étant une base de $\mathbb{R}_n[X]$, $f-P_n(f)$ est donc orthogonal à ce sous-espace vectoriel ; $P_n(f)$ est la projection orthogonale de f sur $\mathbb{R}_n[X]$. En particulier : $\langle f-P_n(f) \mid P_n(f)-Q\rangle=0$ et d'après le théorème de Pythagore,

$$\|f-Q\|^2=\|f-P_n(f)+P_n(f)-Q\|^2=\|f-P_n(f)\|^2+\|P_n(f)-Q\|^2.$$

Ainsi, $\|f-P_n(f)\|\leqslant\|f-Q\|$, avec égalité si et seulement si $Q=P_n(f)$.

Question 10. Soit $\epsilon>0$. Il existe une suite de polynômes qui converge uniformément vers f sur $[-1,1]$ donc parmi eux se trouvent des polynômes vérifiant : $\|f-Q\|_\infty\leqslant\epsilon$. Considérons en un, et notons N son degré.
Alors : $\|f-P_N(f)\|\leqslant\|f-Q\|\leqslant\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\|f-Q\|_\infty}{\sqrt{1-t^2}}=\pi\|f-Q\|_\infty\leqslant\pi\epsilon$.
Par ailleurs, nous avons pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $P_{n-1}(f)\in\mathbb{R}_n[X]$ donc $\|f-P_n(f)\|\leqslant\|f-P_{n-1}(f)\|$; la suite $\big(\|f-P_n(f)\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et donc : $\forall n\geqslant N$, $\|f-P_n(f)\|\leqslant\pi\epsilon$.
Si on récapitule, on a montré que :

$$\forall\epsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}\ \big|\ n\geqslant N\Longrightarrow\|f-P_n(f)\|\leqslant\pi\epsilon\,;$$

ce qui signifie que la suite $\big(\|f-P_n(f)\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Question 11. D'après le théorème de Pythagore, $\|f\|^2=\|P_n(f)\|^2+\|f-P_n(f)\|^2$, donc, puisque $\lim\limits_{+\infty}\|f-P_n(f)\|=0$, on a bien : $\lim\limits_{+\infty}\|P_n(f)\|^2=\|f\|^2$.

La famille (T_n) étant orthogonale, on a : $\|P_n(f)\|^2=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}c_k(f)^2\|T_k\|^2=\pi c_0(f)^2+\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}c_k(f)^2$.
On en déduit que la série $\sum c_k(f)^2$ converge, et en passant à la limite :

$$2c_0(f)^2+\sum_{k=1}^{+\infty}c_k(f)^2=\frac{2}{\pi}\|f\|^2=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

Question 12. Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\langle f \mid T_n\rangle=\int_{-1}^{1}\frac{f(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\int_0^{\pi}f(\cos\theta)\cos(n\theta)\,d\theta=\int_0^{\pi}\sin\theta\cos(n\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\Big(\sin(n+1)\theta-\sin(n-1)\theta\Big)d\theta,$$

donc $\langle f \mid T_n\rangle=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n-1}\cos(n-1)\theta-\dfrac{1}{n+1}\cos(n+1)\theta\right]_0^{\pi}=-\left(\dfrac{1+(-1)^n}{n^2-1}\right)$ si $n\neq 1$, et $\langle f \mid T_1\rangle=0$.

Ainsi, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, $c_{2p}(f) = \dfrac{-4}{\pi(4p^2-1)}$, $c_{2p-1}(f) = 0$ et $c_0(f) = \dfrac{2}{\pi}$.

Par ailleurs, $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = 1$, et la formule de la question 11 donne :

$$\frac{8}{\pi^2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2(4p^2-1)^2} = 1 \iff \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(4p^2-1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$

Troisième partie

Question 13. Considérons les polynômes d'interpolation de Lagrange $\mathrm{L}_0, \dots, \mathrm{L}_n$ aux points $x_0, \dots, x_n$. On sait que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(x_k)\mathrm{L}_k$, donc $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{P}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{P}(x_k)$, avec $\lambda_k = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{L}_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

L'unicité se justifie en appliquant cette égalité avec $\mathrm{P} = \mathrm{L}_k$, qui fournit la valeur de λ_k.

Question 14. Si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{2n+1}[\mathrm{X}]$, effectuons la division euclidienne de P par T_{n+1} : $\mathrm{P} = \mathrm{Q}\mathrm{T}_{n+1} + \mathrm{R}$, avec $\deg \mathrm{R} \leqslant n$ et $\deg \mathrm{Q} \leqslant n$. On a d'une part :

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{P}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \langle \mathrm{Q} \mid \mathrm{T}_{n+1} \rangle + \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{R}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{R}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \quad \text{car} \quad \mathrm{T}_{n+1} \in \mathrm{Vect}(\mathrm{T}_0, \dots, \mathrm{T}_n)^{\perp} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^{\perp}$$

et d'autre part :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{P}(x_k) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{R}(x_k) \quad \text{car} \quad \mathrm{T}_{n+1}(x_k) = 0.$$

La formule (1) étant vraie pour le polynôme R, ces égalités montrent qu'elle reste vraie pour le polynôme P.

Question 15. Sachant que $\mathrm{T}_{n+1} = 2^n\Big(\displaystyle\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)\Big)(\mathrm{X} - x_k)\mathrm{L}_k = \mathrm{T}'_{n+1}(x_k)(\mathrm{X} - x_k)\mathrm{L}_k$, on en déduit :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{x_k\}, \quad \mathrm{L}_k(t) = \frac{\mathrm{T}_{n+1}(t)}{\mathrm{T}'_{n+1}(x_k)(t - x_k)},$$

cette égalité se prolongeant par continuité en x_k. Ainsi, $\lambda_k = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{T}_{n+1}(t)}{\mathrm{T}'_{n+1}(x_k)(t - x_k)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$.

Question 16. Au voisinage de θ_k, on a $\cos\theta - \cos\theta_k \underset{\theta_k}{\sim} (\theta_k - \theta)\sin\theta_k$ et $\cos(j\theta) - \cos(j\theta_k) \underset{\theta_k}{\sim} j(\theta_k - \theta)\sin(j\theta_k)$, donc :

$$\lim_{\theta \to \theta_k} \frac{\cos(j\theta) - \cos(j\theta_k)}{\cos\theta\cos\theta_k} = j.$$

α_j apparaît donc comme l'intégrale d'une fonction prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0, \pi]$, et est en conséquence bien défini.

L'égalité : $\cos(j+1)\phi + \cos(j-1)\phi = 2\cos(j\phi)\cos\phi$ conduit à :

$$\alpha_{j+1} - 2(\cos\theta_k)\alpha_j + \alpha_{j-1} = \int_0^{\pi} 2\cos(j\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

Question 17. La suite (α_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 dont le polynôme caractéristique est : $\mathrm{X}^2 - 2\cos(\theta_k)\mathrm{X} + 1 = (\mathrm{X} - \mathrm{e}^{i\theta_k})(\mathrm{X} - \mathrm{e}^{-i\theta_k})$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \alpha_j = \lambda\cos(j\theta_k) + \mu\sin(j\theta_k).$$

Sachant que $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 = \pi$, on trouve : $\lambda = 0$ et $\mu = \dfrac{\pi}{\sin\theta_k}$. Ainsi, $\alpha_{n+1} = \pi\dfrac{\sin(n+1)\theta_k}{\sin\theta_k}$.

Par ailleurs, le changement de variable $t = \cos\theta$ dans l'égalité de la question 15 donne :

$$\lambda_k = \frac{1}{\mathrm{T}'_{n+1}(\cos\theta_k)} \int_0^{\pi} \frac{\cos(n+1)\theta}{\cos\theta - \cos\theta_k}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\mathrm{T}'_{n+1}(\cos\theta_k)} \int_0^{\pi} \frac{\cos(n+1)\theta - \cos(n+1)\theta_k}{\cos\theta - \cos\theta_k}\,\mathrm{d}\theta$$

(car $\cos(n+1)\theta_k = T_{n+1}(\cos\theta_k) = T_{n+1}(x_k) = 0$). Ainsi, $\lambda_k = \dfrac{\alpha_{n+1}}{T'_{n+1}(\cos\theta_k)}$.

La dérivation de l'égalité : $T_{n+1}(\cos\theta) = \cos(n+1)\theta$ apporte : $T'_{n+1}(\cos\theta) = (n+1)\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$, puis :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \lambda_k = \frac{\pi}{n+1}.$$

Ainsi, on a démontré : $\forall P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n} P(x_k)$.