Sommation au sens d'Abel et de Borel

Durée : 4 heures

Ce problème est constitué de deux parties indépendantes.

Partie I. Sommation au sens d'Abel

À toute suite de nombres réels (a_n) on associe la fonction f_a définie par :

$$f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On dit que la suite (a_n) est *A-sommable* lorsque la fonction f_a est au moins définie sur l'intervalle $[0,1[$ et admet une limite à gauche en 1. Lorsque la suite (a_n) est A-sommable on pose $S_A(a) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f_a(x)$.

Question 1. Dans chacun des trois cas suivants, indiquer si la suite (a_n) est A-sommable, et le cas échéant donner la valeur de $S_A(a)$.

a) $a_n = \dfrac{1}{(2n)!}$;

b) $a_0 = 0$ et $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$;

c) $a_n = (-1)^n(n+1)$.

> Dans les deux questions suivantes on suppose que la série $\sum a_n$ converge et on note R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Question 2. Montrer que $R \geqslant 1$, puis que si $R > 1$ alors (a_n) est A-sommable et $S_A(a) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Question 3. On suppose maintenant que $R = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$.

a) Soit $\epsilon > 0$. Justifier l'existence d'un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, $|R_n| \leqslant \dfrac{\epsilon}{2}$.

b) Justifier, pour tout entier n et tout entier $p > n+1$ l'égalité :

$$\forall x \in [0,1], \quad S_p(x) - S_n(x) = x^{n+1}R_n + \sum_{k=n+1}^{p-1} (x^{k+1} - x^k)R_k - x^p R_p.$$

c) En déduire que pour tout $n \geqslant N$ et tout $p > n+1$:

$$\forall x \in [0,1], \quad \left|S_p(x) - S_n(x)\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2}\left(x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} (x^k - x^{k+1}) + x^p\right).$$

d) Montrer que la suite de fonctions converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction que l'on précisera.

e) En déduire que la suite (a_n) est A-sommable, et donner la valeur de $S_A(a)$.

Question 4. Calculer en le justifiant la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Question 5. Dans cette question on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 0$ et que la suite (a_n) est A-sommable.

a) Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} a_k x^k \leqslant \mathrm{S_A}(a)$.

b) En déduire que la série $\sum a_n$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leqslant \mathrm{S_A}(a)$.

c) Prouver enfin que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \mathrm{S_A}(a)$.

Question 6. Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers 0, et pour $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que (v_n) converge vers 0.

Question 7. Dans cette question on suppose que $\lim(na_n) = 0$ et que la suite (a_n) est A-sommable.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = f_a\Big(1 - \dfrac{1}{n}\Big) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.

a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\big|(1-x)^k - 1\big| \leqslant kx$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Big|\sum_{k=0}^{n}\Big(\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^k - 1\Big)a_k\Big| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k|a_k|.$$

c) Montrer que $\mathrm{B}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^k a_k$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

d) En déduire que (b_n) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, puis que la série $\sum a_n$ converge.

Question 8. Dans cette question, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 0$ et que la suite (a_n) est A-sommable. Montrer que la série $\sum \dfrac{a_n}{n+1}$ converge et que sa somme est égale à $\displaystyle\int_0^1 f_a(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie II. Sommation au sens de Borel

À toute suite de nombres réels (u_n) on associe la suite (U_n) de ses sommes partielles, à savoir : $\mathrm{U}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$, ainsi que les deux fonctions u et U définies par :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{x^n}{n!} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{U}_n \frac{x^n}{n!}.$$

On dit que la suite (u_n) est *B-sommable* lorsque la fonction U est définie sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{U}(x)$ appartient à $\mathbb{R}$. Lorsque (u_n) est B-sommable on pose $\mathrm{S_B}(u) = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{U}(x)$.

On dit que la suite (u_n) est *C-sommable* lorsque la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\lim_{y\to+\infty}\int_0^y \mathrm{e}^{-x}\,u(x)\,\mathrm{d}x$ appartient à $\mathbb{R}$. Lorsque (u_n) est C-sommable on pose $\mathrm{S_C}(u) = \displaystyle\lim_{y\to+\infty}\int_0^y \mathrm{e}^{-x}\,u(x)\,\mathrm{d}x$.

Question 9. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) La suite (u_n) est-elle B-sommable ?

b) La suite (u_n) est-elle C-sommable ?

Question 10. Soit a un réel non nul. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = a^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Étudier suivant les valeurs de a la B-sommabilité de la suite (u_n). Pour les valeurs de a telles que la suite (u_n) est B-sommable, calculer $\mathrm{S_B}(u)$.

b) Étudier suivant les valeurs de a la C-sommabilité de la suite (u_n). Pour les valeurs de a telles que la suite (u_n) est C-sommable, calculer $\mathrm{S_C}(u)$.

Question 11. On considère une suite (u_n) bornée. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction u.

Question 12. On considère une suite (u_n) telle que la série $\sum u_n$ soit convergente. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions u et U.

Question 13. On suppose dans cette question que la série $\sum u_n$ est convergente de somme U_∞.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{U}(x) - \mathrm{U}_\infty\right| \leqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |\mathrm{U}_n - \mathrm{U}_\infty| \frac{x^n\,\mathrm{e}^{-x}}{n!}$.

b) En déduire que la suite (u_n) est B-sommable et que $\mathrm{S_B}(u) = \mathrm{U}_\infty$.

Question 14. On suppose dans cette question que la série $\sum u_n$ est convergente de somme U_∞ et on pose $\mathrm{U}_{-1} = 0$.

a) Montrer que la fonction B définie par $\mathrm{B}(x) = \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{U}_{n-1} \frac{x^n}{n!}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{B}(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,u(t)\,\mathrm{d}t$.

c) Prouver alors que la suite (u_n) est C-sommable et que $\mathrm{S_C}(u) = \mathrm{U}_\infty$.

Question 15. Les questions 13 et 14 ont prouvé que lorsque la série $\sum u_n$ converge de somme U_∞, la suite (u_n) est à la fois B-sommable et C-sommable, avec $\mathrm{S_B}(u) = \mathrm{S_C}(u) = \mathrm{U}_\infty$. La réciproque est-elle vraie ?