Corrigé : sommation au sens d'Abel et de Borel

Partie I. Sommation au sens d'Abel

Question 1.

a) La série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$ donc la fonction f_a est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est en particulier continue en 1 donc (a_n) est A-sommable, avec $S_A(a) = f_a(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n)!} = \operatorname{ch}(1)$.

b) La série entière $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ a un rayon de convergence égal à 1 donc la fonction f_a est définie au moins sur $]-1,1[$, avec $f_a(x) = \ln(1+x)$. On a $\lim_1 f_a(x) = \ln 2$ donc (a_n) est A-sommable, avec $S_A(a) = \ln 2$.

c) La série entière $\sum (-1)^n(n+1)x^n$ a un rayon de convergence égal à 1 donc la fonction f_a est définie au moins sur $]-1,1[$, avec $f_a(x) = \dfrac{d}{dx}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^n\Big) = \dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{-1}{1+x}\Big) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$. On a $\lim_1 f_a(x) = \dfrac{1}{4}$ donc (a_n) est A-sommable, avec $S_A(a) = \dfrac{1}{4}$.

Question 2. Si on avait $R < 1$ la série entière $\sum a_n x^n$ divergerait grossièrement pour $x = 1$. ce n'est pas le cas ici, donc $R \geqslant 1$.
Si on a $R > 1$ la fonction f_a est continue sur $[-R, R[$ et en particulier continue en 1, donc $\lim_{x\to 1} f_a(x) = f_a(1)$. Ainsi (a_n) est A-sommable, et $S_A(a) = f_a(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Question 3.

a) C'est un reste donc $\lim R_n = 0$ et il existe un rang N à partir duquel $|R_n| \leqslant \dfrac{\epsilon}{2}$.

b) On réalise une transformation d'Abel : sachant que $a_k = R_{k-1} - R_k$ on a

$$S_p(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{p} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{p} (R_{k-1} - R_k)x^k = \sum_{k=n}^{p-1} R_k x^{k+1} - \sum_{k=n+1}^{p} R_k x^k = x^{n+1}R_n + \sum_{k=n+1}^{p-1}(x^{k+1} - x_k)R_k - x^p R_p$$

c) Lorsque $N \leqslant n < p-1$ on en déduit pour tout $x \in [0,1]$: $\big|S_p(x) - S_n(x)\big| \leqslant x^{n+1}\dfrac{\epsilon}{2} + \sum_{k=n+1}^{p-1}(x^k - x^{k+1})\dfrac{\epsilon}{2} + x^p\dfrac{\epsilon}{2}$.

d) Si on poursuit le calcul on obtient pour tout $x \in [0,1]$, $\big|S_p(x) - S_n(x)\big| \leqslant \dfrac{\epsilon}{2}(2x^{n+1}) = \epsilon x^{n+1} \leqslant \epsilon$.

Par ailleurs, la suite de fonctions (S_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction S définie par $S(x) = \begin{cases} f_a(x) & \text{si } x \in [0,1[\\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n & \text{si } x = 1 \end{cases}$.

En faisant tendre p vers $+\infty$ on obtient : $\forall n \geqslant N$, $\forall x \in [0,1]$, $\big|S(x) - S_n(x)\big| \leqslant \epsilon$, autrement dit $\|S - S_n\|_\infty \leqslant \epsilon$. Nous avons montré que la suite (S_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction S.

e) Puisque chacune des fonctions S_n est continue, la fonction S est elle aussi continue, et en particulier continue en 1 : nous pouvons donc affirmer que $\lim_{x\to 1^-} f_a(x) = \lim_{x\to 1^-} S(x) = S(1)$, autrement dit : (a_n) est sommable et $S_A(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Question 4. Posons $a_0 = 0$ et $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ si $n \geqslant 1$. La série $\sum a_n$ converge donc d'après la question précédente, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S_A(a)$, ce qui donne avec la question 1 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

Question 5.

a) Puisque (a_n) est à valeurs positives, pour tout $x \in [0,1[$, $\sum_{k=0}^{N} a_k x^k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = f_a(x)$. Par ailleurs, toujours car (a_n) est à valeurs positives, la fonction f_a est croissante sur $[0,1[$. On en déduit que $f_a(x) \leqslant \lim_{x\to 1^-} f_a(x) = S_A(a)$. On a donc bien $\sum_{k=0}^{N} a_k x^k \leqslant S_A(a)$.

b) En faisant tendre x vers 1 dans cette somme finie on obtient que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{N} a_k \leqslant S_A(a)$. Les sommes partielles de la série $\sum a_n$ sont donc majorées ; s'agissant d'une suite croissante elles possèdent une limite. Autrement dit, $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leqslant S_A(a)$.

c) Soit $\epsilon > 0$. On a $\lim_{x\to 1^-} f_a(x) = S_A(a)$ donc il existe $\eta > 0$ tel que pour $x \in [\eta, 1[$, $S_A(a) - \epsilon \leqslant f_a(x)$. Mais $f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
On a donc prouvé que pour tout $\epsilon > 0$, $S_A(a) - \epsilon \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leqslant S_A(a)$, autrement dit : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S_A(a)$.

Remarque. On peut aussi plus simplement utiliser les questions 2 et 3 qui ont prouvé que lorsque $\sum a_n$ converge, (a_n) est A-sommable, avec $S_A(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Question 6. Soit $\epsilon > 0$. Il existe un rang N à partir duquel $|u_n| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$. Pour $n \geqslant N$ on a donc

$$|v_n| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1} |u_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} \frac{\epsilon}{2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N-1} |u_k| + \frac{n-N+1}{n}\frac{\epsilon}{2}.$$

Ce majorant tend vers $\frac{\epsilon}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc il existe un rang $N' \geqslant N$ à partir duquel $|v_n| \leqslant \epsilon$, ce qui prouve que $\lim v_n = 0$.

Question 7.

a) Posons $g(x) = (1-x)^k - 1 + kx$. On a $g'(x) = k\Big(1-(1-x)^{k-1}\Big)$ donc g est croissante sur $[0,1]$. On a $g(0) = 0$ donc pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) \geqslant 0$, soit $(1-x)^k - 1 \geqslant -kx$.
Posons $h(x) = kx - (1-x)^k + 1$. On a $h'(x) = k\Big(1 + (1-x)^{k-1}\Big)$ donc g est croissante sur $[0,1]$. On a $h(0) = 0$ donc pour tout $x \in [0,1]$, $h(x) \geqslant 0$, soit $(1-x)^k - 1 \leqslant kx$.
On a donc bien $\left|(1-x)^k - 1\right| \leqslant kx$.

b) On a donc : $\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^k - 1\right)a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^k - 1\right| |a_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}|a_k| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k|a_k|$, et on peut faire débuter ces sommes à 0 puisque pour $k = 0$ le terme associé est nul.

c) Soit $\epsilon > 0$. Puisque $\lim na_n = 0$ il existe un rang N à partir duquel $|a_k| \leqslant \frac{\epsilon}{k}$. Ainsi, pour $n \geqslant N$:

$$|B_n| \leqslant \epsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k \leqslant \frac{\epsilon}{n}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k = \epsilon\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{(la dernière somme est géométrique).}$$

Ainsi, $|B_n| \leqslant \epsilon$ pour $n \geqslant N$, ce qui montre que $\lim B_n = 0$.

d) On a $b_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\left(1-\frac{1}{n}\right)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^k - 1\right)a_k + B_n$. Ainsi d'après la question 7b, $|b_n| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + |B_n|$, et à l'aide des questions 6 et 7c, $\lim b_n = 0$.

Enfin, la suite (a_n) étant A-sommable, $\lim_{n\to+\infty} f_a\left(1-\frac{1}{n}\right) = S_A(a)$, et donc $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k = S_A(a)$, ce qui prouve que la série $\sum a_k$ converge.

Question 8. Posons $f_n(x) = a_n x^n$. Sur $[0,1]$ on a $\|f_n\|_\infty = a_n$. D'après la question 5 la série $\sum a_n$ converge donc la convergence de $\sum f_n$ est normale, et donc uniforme, sur $[0,1]$. Il en résulte :

$$\int_0^1 f_a(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\Big)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}.$$

Partie II. Sommation au sens de Borel

Question 9.

a) Lorsque $u_n = (-1)^n$ on a $\mathrm{U}_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ donc $\sum \mathrm{U}_n \frac{x^n}{n!} = \sum \frac{x^{2p}}{(2p)!}$. Cette série entière a un rayon de convergence égal à $+\infty$ et sa somme $\mathrm{U}(x)$ est égale à $\operatorname{ch} x$.

On a $\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{U}(x) = \mathrm{e}^{-x} \operatorname{ch} x = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{2}$ donc $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{U}(x) = \dfrac{1}{2}$: la suite (u_n) est B-sommable, et $\mathrm{S_B}(u) = \dfrac{1}{2}$.

b) On a $\sum u_n \dfrac{x^n}{n} = \sum (-1)^n \dfrac{x^n}{n!}$. Cette série a un rayon de convergence égal à $+\infty$ et sa somme $u(x)$ est égale à e^{-x}.

On a $\displaystyle\int_0^{\mathrm{Y}} \mathrm{e}^{-x}\,u(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\mathrm{Y}} \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{Y}})$ donc $\displaystyle\lim_{\mathrm{Y}\to+\infty} \int_0^{\mathrm{Y}} \mathrm{e}^{-x}\,u(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$: la suite (u_n) est C-sommable, et $\mathrm{S_C}(u) = \dfrac{1}{2}$.

Question 10.

a) Lorsque $a = 1$ on a $\mathrm{U}_n = n+1$ et $\sum \mathrm{U}_n \dfrac{x^n}{n!} = \sum (n+1)\dfrac{x^n}{n!}$. Cette série entière a un rayon de convergence égal à $+\infty$ et sa somme vaut $\displaystyle\mathrm{U}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = x\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = (x+1)\,\mathrm{e}^x$. On a $\lim\limits_{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{U}(x) = +\infty$ donc pour $a = 1$ la suite (u_n) n'est pas B-sommable.

Lorsque $a \neq 1$ on a $\mathrm{U}_n = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$ et $\displaystyle\sum \mathrm{U}_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1-a}\sum (1-a^{n+1})\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{1-a}\sum\Big(\frac{x^n}{n!} - a\frac{(ax)^n}{n!}\Big)$. Cette série entière a un rayon de convergence égal à $+\infty$ et sa somme vaut $\mathrm{U}(x) = \dfrac{e^x - a\,\mathrm{e}^{ax}}{1-a}$.

On a $\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{U}(x) = \dfrac{1-a\,\mathrm{e}^{(a-1)x}}{1-a}$ donc la suite (u_n) est B-sommable si et seulement si $a < 1$, et dans ce cas $\mathrm{S_B}(u) = \dfrac{1}{1-a}$.

b) La série $\sum a^n \dfrac{x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini et sa somme vaut $u(x) = \mathrm{e}^{ax}$.

On a donc $\displaystyle\int_0^{\mathrm{Y}} \mathrm{e}^{-x}\,u(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\mathrm{Y}} \mathrm{e}^{(a-1)x}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \mathrm{Y} & \text{si } a = 1 \\ \dfrac{1}{1-a}\Big(1-\mathrm{e}^{(a-1)\mathrm{Y}}\Big) & \text{si } a \neq 1 \end{cases}.$

Ainsi, la suite (u_n) est C-sommable si et seulement si $a < 1$, et dans ce cas $\mathrm{S_C}(u) = \dfrac{1}{1-a}$.

Question 11. Lorsque (u_n) est bornée on a $\dfrac{u_n}{n!} = \mathrm{O}\Big(\dfrac{1}{n!}\Big)$. la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini, il en est donc de même de $\sum u_n \dfrac{x^n}{n!}$ et la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$.

Question 12. Si la série $\sum u_n$ converge, la suite (u_n) tend vers 0 donc est bornée. D'après la question précédente la fonction u est définie sur $\mathbb{R}$.

De plus, la suite (U_n) est convergente donc elle aussi bornée ; la fonction U est donc définie sur $\mathbb{R}$.

Question 13.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{U}(x) - \mathrm{U}_\infty = \mathrm{e}^{-x}\Big(\mathrm{U}(x) - \mathrm{U}_\infty\,\mathrm{e}^x\Big) = \mathrm{e}^{-x}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{U}_n \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{U}_\infty \frac{x^n}{n!}\Big)$. Ainsi,

$$\Big|\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{U}(x) - \mathrm{U}_\infty\Big| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |\mathrm{U}_n - \mathrm{U}_\infty| \frac{x^n\,\mathrm{e}^{-x}}{n!}$$

b) Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un rang N à partir duquel $|U_n - U_\infty| \leqslant \epsilon$. Ainsi, pour tout $x > 0$,

$$\left|e^{-x}U(x) - U_\infty\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} |U_n - U_\infty| \frac{x^n e^{-x}}{n!} + \epsilon e^{-x} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \leqslant \sum_{n=0}^{N-1} |U_n - U_\infty| \frac{x^n e^{-x}}{n!} + \epsilon$$

Pour tout $n \in [\![0, N-1]\!]$, $\lim\limits_{+\infty} x^n e^{-x} = 0$ donc, s'agissant d'une somme finie, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{N-1} |U_n - U_\infty| \frac{x^n e^{-x}}{n!} = 0$. Il existe donc un réel $K > 0$ tel que pour tout $x \geqslant K$, $\sum\limits_{n=0}^{N-1} |U_n - U_\infty| \frac{x^n e^{-x}}{n!} \leqslant \epsilon$.

Pour $x \geqslant K$ on a donc $\left|e^{-x}U(x) - U_\infty\right| \leqslant 2\epsilon$, ce qui traduit le fait que $\lim e^{-x}U(x) = U_\infty$.

Question 14.

a) La série entière $\sum \frac{U_{n-1}}{n!} x^n$ a même rayon de convergence que sa série dérivée, qui n'est autre que $\sum U_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, série dont le rayon de convergence est infini (question 12). La fonction B est donc définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) On calcule :

$$B'(x) = e^{-x} \sum_{n=1}^{+\infty} U_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} U_{n-1} \frac{x^n}{n!} = e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} (U_n - U_{n-1}) \frac{x^n}{n!} = e^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{x^n}{n!} = e^{-x} u(x)$$

Puisque $B(0) = 0$ on en déduit $B(x) = \int_0^x B'(t)\,dt = \int_0^x e^{-t} u(t)\,dt$.

c) Considérons la suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et $v_n = u_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$, ainsi que $V_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k = U_{n-1}$. D'après la question 13 la suite (v_n) est B-sommable, avec $S_B(v) = \lim V_n = U_\infty$.

Or $S_B(v) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-s} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} U_{n-1} \frac{x^n}{n!} = \lim\limits_{x\to+\infty} B(x)$ donc B possède une limite égale à U_∞ lorsque x tend vers $+\infty$. D'après la question précédente cela signifie que (u_n) est C-sommable, et que $S_C(u) = U_\infty$.

Question 15. Posons $u_n = (-1)^n$. La série $\sum u_n$ diverge bien que (u_n) soit B-sommable et C-sommable (question 9). La réciproque est donc fausse.