Optimisation d'une interpolation (X PC 2020)

Durée : 4 heures

Notations

Dans tout le problème, pour tout $(a,b)\in\mathbb{N}^2$ on notera $[\![a,b]\!]=\left\{i\in\mathbb{N}\;\middle|\;a\leqslant i\leqslant b\right\}$ l'ensemble des entiers compris entre a et b.
Soient $p,q\in\mathbb{N}^*$ deux entiers strictement positifs. On note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients réels de taille $p\times q$ (p lignes et q colonnes). Lorsque $p=q$, on notera $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $p\times p$.

Pour tout $\mathrm{A}\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, A^{T} désignera la transposée de A. Un vecteur $u\in\mathbb{R}^p$ pourra être identifié à un vecteur colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et u^{T} sera le vecteur ligne associé de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$.
Pour tous $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ on note $\mathrm{A}\odot\mathrm{B}$ la matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ définie pour tous $1\leqslant i\leqslant p$ et $1\leqslant j\leqslant q$ par :

$$(\mathrm{A}\odot\mathrm{B})_{ij}=\mathrm{A}_{ij}\mathrm{B}_{ij}$$

où pour tout matrice $\mathrm{M}\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, M_{ij} désigne le coefficient de la ligne i et de la colonne j.

Pour tout $\mathrm{A}\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on définit $\mathrm{A}^{(0)}\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ la matrice telle que $\mathrm{A}^{(0)}_{ij}=1$ pour tous $1\leqslant i\leqslant p$ et $1\leqslant j\leqslant q$ puis par récurrence, $\mathrm{A}^{(n+1)}=\mathrm{A}^{(n)}\odot\mathrm{A}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Enfin, on dira qu'une matrice $\mathrm{A}\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est symétrique positive si $\mathrm{A}^{\mathrm{T}}=\mathrm{A}$ et $u^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u\geqslant 0$ pour tout $u\in\mathbb{R}^p$. L'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ sera noté $\mathrm{Sym}^+(p)$.

Dépendance des parties

Les parties III et IV sont indépendantes des parties I et II et la partie V dépend des parties précédentes.

Partie I.

Question 1. Montrer que pour toutes matrices A et B dans $\mathrm{Sym}^+(p)$ et tous réels positifs a et b on a $a\mathrm{A}+b\mathrm{B}\in\mathrm{Sym}^+(p)$.

Question 2. Montrer que si $v\in\mathbb{R}^p$ alors la matrice $\mathrm{A}=(\mathrm{A}_{ij})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$ définie par $\mathrm{A}=vv^{\mathrm{T}}$ est dans $\mathrm{Sym}^+(p)$.

Question 3.

a) Montrer que pour tous $u,v\in\mathbb{R}^p$, on a $(uu^{\mathrm{T}})\odot(vv^{\mathrm{T}})=(u\odot v)(u\odot v)^{\mathrm{T}}$.

b) Soit $\mathrm{A}\in\mathrm{Sym}^+(p)$. On note $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ les valeurs propres (avec multiplicité) de A et $(u_1,\dots,u_p)$ une famille orthonormale de vecteurs propres associés. Montrer que $\lambda_k\geqslant 0$ pour tout $k\in[\![1,p]\!]$ et que $\mathrm{A}=\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\lambda_k u_k u_k^{\mathrm{T}}$.

c) En déduire que si $\mathrm{A},\mathrm{B}\in\mathrm{Sym}^+(p)$ alors $\mathrm{A}\odot\mathrm{B}\in\mathrm{Sym}^+(p)$.

Partie II.

Pour $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $\mathrm{A}\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note $f[\mathrm{A}]\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice définie par $f[\mathrm{A}]_{ij}=f(\mathrm{A}_{ij})$ pour tout $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$.

Question 4. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $\mathrm{P}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ défini par $\mathrm{P}(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ où $a_k\geqslant 0$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$ un polynôme à coefficients positifs.

a) Vérifier que $\mathrm{P}[\mathrm{A}]=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k\mathrm{A}^{(k)}$ pour toute matrice $\mathrm{A}\in\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

b) Montrer que si $\mathrm{A}\in\mathrm{Sym}^+(p)$ alors $\mathrm{P}[\mathrm{A}]\in\mathrm{Sym}^+(p)$.

On pose, pour tout $n\geqslant 0$ et tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{P}_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ où $k!$ désigne la factorielle de k.

Question 5. Soit $A \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

a) Montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} P_n[A]_{ij} = \exp(A_{ij})$$

b) Montrer que $\exp[A] \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

c) Soit $u \in \mathbb{R}^p$. Montrer que $\exp[A] \odot (uu^T) \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

Question 6. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On considère un p-uplet $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ d'éléments de $\mathbb{R}^d$ et la matrice

$$A = \left(\langle x_i, x_j\rangle\right)_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$$

où $\langle a,b\rangle$ désigne le produit scalaire usuel entre deux vecteurs a et b de $\mathbb{R}^d$. On notera $|a| = \sqrt{\langle a,a\rangle}$ la norme de a.

a) Montrer que $A \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

b) On note $u \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de coordonnées $\left(\exp\left(-\frac{|x_1|^2}{2}\right), \dots, \exp\left(-\frac{|x_p|^2}{2}\right)\right)$.

Montrer que $(\exp[A] \odot (uu^T))_{ij} = \exp\left(-\frac{|x_i - x_j|^2}{2}\right)$ pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$.

c) Soient $\lambda > 0$ et $K \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice définie par $K_{ij} = \exp\left(-\frac{|x_i - x_j|^2}{2\lambda}\right)$ pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$. Montrer que $K \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

Partie III.

Soit $\lambda > 0$ fixé. On considère ici l'espace $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dans toute la suite, on désigne par $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (*on ne demande pas de vérifier ce fait*) défini par

$$\mathcal{E} = \left\{ f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathrm{R}) \;\middle|\; \exists (a, A) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \text{ tel que } \forall y \in \mathbb{R}\ |f(y)| \leqslant A\exp(-y^2/a) \right\}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\tau_x : \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'application définie pour tout $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par

$$\tau_x(f)(y) = f(y-x)$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$. Enfin, on définit la fonction $\gamma_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\gamma_\lambda(y) = \exp(-y^2/\lambda)$$

Question 7. Pour tout $(f,g) \in \mathcal{E}^2$, montrer que fg est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Pour tous $f, g \in \mathcal{E}$, on définit

$$(f \mid g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

Question 8.

a) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{E}$, on a $(f \mid f) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $f = 0$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tau_x(\gamma_\lambda)$ appartient à $\mathcal{E}$.

Question 9.

a) Soit $a > 0$. Montrer qu'il existe $c \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right)\exp\left(-\frac{y^2}{a}\right)\mathrm{d}y = c\exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right)$$

Indication : On pourra montrer l'égalité

$$\frac{(y-x)^2}{\lambda} + \frac{y^2}{a} = \frac{a+\lambda}{a\lambda}\left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2 + \frac{x^2}{a+\lambda}$$

b) Soit $g \in \mathcal{E}$. On considère $C(g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$C(g)(x) = \left(\tau_x(\gamma_\lambda) \,\middle|\, g\right)$$

Montrer que $C(g) \in \mathcal{E}$.

c) Montrer que $C : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ définit un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

Partie IV.

Soit $\lambda > 0$ fixé. On considère maintenant l'ensemble $\mathcal{G}$ des fonctions g s'écrivant sous la forme $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_\lambda)$ où n est un entier strictement positif et $(x_i, \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{G} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_\lambda) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \in [\![1,n]\!]\ (x_i, \alpha_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \right\}$$

On notera $\mathcal{H} = \mathrm{C}(\mathcal{G})$ l'image de $\mathcal{G}$ par l'endomorphisme C introduit dans la question 9b.

Question 10. Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ et que c'est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ qui contient toutes les fonctions $\tau_x(\gamma_\lambda)$ pour $x \in \mathbb{R}$ arbitraire.

Question 11.

a) Montrer qu'il existe $c_\lambda > 0$ telle que pour tout $(x, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on a

$$\left(\tau_x(\gamma_\lambda) \,\middle|\, \tau_{x'}(\gamma_\lambda) \right) = c_\lambda \gamma_{2\lambda}(x - x')$$

Indication : on pourra remarquer que $\frac{1}{\lambda}\left((y-x)^2 + (y-x')^2\right) = \frac{2}{\lambda}\left(y - (x+x')/2\right)^2 + \frac{1}{2\lambda}(x'-x)^2$.

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{C}\left(\tau_x(\gamma_\lambda)\right) = c_\lambda \tau_x(\gamma_{2\lambda})$$

et que

$$\mathcal{H} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ (x_i, \alpha_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \right\}$$

Question 12.

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de réels telle que pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$ on a $x_i \neq x_j$ lorsque $i \neq j$.

Montrer que la fonction $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$ est nulle si et seulement si $\alpha_i = 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ (*Indication : on pourra procéder par récurrence sur n*).

b) En déduire qu'il existe une unique application linéaire D de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}$ telle que $\mathrm{D} \circ \mathrm{C}(g) = g$ pour tout $g \in \mathcal{G}$ et $\mathrm{C} \circ \mathrm{D}(h) = h$ pour tout $h \in \mathcal{H}$.

c) Montrer que pour tout $h \in \mathcal{H}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ que $h(x) = \left(\tau_x(\gamma_\lambda) \,\middle|\, \mathrm{D}(h) \right)$.

Question 13. Pour tout $(h_1, h_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, on note $(h_1 \mid h_2)_{\mathcal{H}} = c_\lambda \left(\mathrm{D}(h_1) \,\middle|\, \mathrm{D}(h_2) \right)$ où c_λ est introduit dans la question 11a.

a) Vérifier que $(\cdot \mid \cdot)_{\mathcal{H}}$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{H}$.

b) Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathcal{H}$ on a $h(x) = \left(\tau_x(\gamma_{2\lambda}) \,\middle|\, h \right)_{\mathcal{H}}$.

c) Montrer que pour tout $h \in \mathcal{H}$ on a

$$\|h\|_\infty \leqslant \|h\|_{\mathcal{H}}$$

où on a posé $\|h\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)|$ et $\|h\|_{\mathcal{H}} = (h \mid h)_{\mathcal{H}}^{1/2}$.

Partie V.

On fixe dans cette partie deux p-uplets $(x_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ et $(a_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ de réels. On suppose que les x_i sont deux à deux distincts. On note $\mathcal{S} = \left\{ h \in \mathcal{H} \,\middle|\, h(x_i) = a_i \right\}$ l'ensemble des $h \in \mathcal{H}$ qui valent a_i en x_i pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ (on dira qu'une telle fonction est une interpolante). On note $\mathrm{J} : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ défini par $\mathrm{J}(h) = \frac{1}{2}\|h\|_{\mathcal{H}}^2$ et $\mathrm{J}_* = \inf\left\{ \mathrm{J}(h) \,\middle|\, h \in \mathcal{S} \right\}$.

On veut montrer dans cette partie qu'il existe une unique interpolante $h_* \in \mathcal{S}$ qui atteint le minimum de J c'est-à-dire telle que $\mathrm{J}(h_*) = \mathrm{J}_*$. On notera $\mathcal{S}_* = \left\{ h \in \mathcal{S} \,\middle|\, \mathrm{J}(h) = \mathrm{J}_* \right\}$.

Question 14. Montrer que S_* a au plus un élément.

Question 15. Soient $\mathcal{H}_0 = \left\{h \in \mathcal{H} \,\middle|\, h(x_i) = 0 \ \forall i \in [\![1, p]\!]\right\}$ et $\tilde{h} \in \mathcal{S}_*$ (on suppose ici $\mathcal{S}_*$ non vide).
Montrer que $(\tilde{h} \mid h_0)_{\mathcal{H}} = 0$ pour tout $h_0 \in \mathcal{H}_0$.

Question 16. On note $\mathcal{H}_0^{\perp} = \left\{h \in \mathcal{H} \,\middle|\, \forall h_0 \in \mathcal{H}_0 \ (h \mid h_0)_{\mathcal{H}} = 0\right\}$ le sous-espace orthogonal à $\mathcal{H}_0$ dans $\mathcal{H}$.

a) Montrer que $\mathcal{S}_* = \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^{\perp}$.

b) Montrer que $\mathcal{H}_0^{\perp}$ contient le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ engendré par les fonctions $\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$ pour $i \in [\![1, p]\!]$.

Question 17. Soient $\alpha \in \mathbb{R}^p$ (resp. $a \in \mathbb{R}^p$) le vecteur de coordonnées $(\alpha_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ (resp. $(a_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$) et $h_\alpha = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$.

a) Montrer que h_α est une interpolante si et seulement si $K\alpha = a$ où K est la matrice introduite dans la question 6 (ici dans le cas $d = 1$).

b) Montrer que K est inversible.

Question 18. En déduire qu'il existe $\alpha_* \in \mathbb{R}^p$ tel que $\mathcal{S}_* = \{h_{\alpha_*}\}$ et calculer la valeur de J_* en fonction de K et a.