Polynômes orthogonaux et équations différentielles (X PC 2005)

Durée : 4 heures

Première partie

Dans cette partie on désigne par E un espace préhilbertien réel, par $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ son produit scalaire et par $\|\cdot\|$ la norme correspondante. On note $F^{\perp}$ le sous-espace vectoriel orthogonal d'une partie F de E.

1. Dans cette question on suppose E de dimension finie, on se donne un sous-espace vectoriel F de E, un vecteur v de E n'appartenant pas à F, et un nombre réel $\alpha > 0$. On note π le projecteur orthogonal $E \to F$.

Construire un élément u de F et un réel λ tels que l'élément $u+\lambda v$ soit orthogonal à F et satisfasse les deux conditions suivantes :

$$\langle u+\lambda v \mid v\rangle > 0 \qquad \text{et} \qquad \|u+\lambda v\| = \alpha.$$

Démontrer l'unicité du couple (u,λ) et comparer $u+\lambda v$ avec la projection orthogonale de v sur $F^{\perp}$.

2. Soit n un entier, $n \geqslant 1$. Soit $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ une famille libre de vecteurs de E et soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une famille de nombres réels strictement positifs. Pour tout p, $0 \leqslant p \leqslant n$, on désigne par E_p le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(v_0, v_1, \dots, v_p)$. Montrer qu'il existe une unique base $(w_0, w_1, \dots, w_n)$ de E_n vérifiant les conditions suivantes :

(i) $w_0 \in E_0$;

(ii) pour tout p, $1 \leqslant p \leqslant n$, $w_p \in E_p \cap E_{p-1}^{\perp}$;

(iii) pour tout p, $0 \leqslant p \leqslant n$, $\langle w_p \mid v_p \rangle > 0$;

(iv) pour tout p, $0 \leqslant p \leqslant n$, $\|w_p\| = \alpha_p$.

Deuxième partie

Dans cette partie on désigne par $[a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, par $\mathcal{C}([a,b])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[a,b]$, par E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([a,b])$ formé des restrictions de fonctions polynomiales, et par E_n celui des restrictions de fonctions polynomiales de degré $\leqslant n$. On se donne une forme linéaire φ sur $\mathcal{C}([a,b])$ telle que $\varphi(f)$ soit positif ou nul si f est positive ou nulle, et strictement positif si de plus f n'est pas identiquement nulle. On note encore $(\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ une suite de nombres réels strictement positifs.

3. Démontrer les assertions suivantes :

a) La formule $\langle f \mid g\rangle = \varphi(fg)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a,b])$.

b) Il existe une unique suite de polynômes $(P_0, P_1, \dots)$ de E satisfaisant les conditions suivantes :

- P_n appartient à E_n et le coefficient de x^n dans P_n, qu'on notera k_n, est strictement positif ;
- $\varphi(P_m P_n) = 0$ si $m \neq n$;
- $\varphi(P_n^2) = \alpha_n^2$.

4.

a) Montrer qu'il existe, pour tout $n \geqslant 2$, des réels A_n, B_n, C_n, tels que l'on ait

$$P_n(x) = (A_n x + B_n) P_{n-1}(x) + C_n P_{n-2}(x).$$

b) Exprimer A_n en fonction de k_n et k_{n-1}, puis C_n en fonction de k_n, k_{n-1}, k_{n-2}, α_{n-1}, α_{n-2}.

5. On se propose ici de démontrer que, pour $n \geqslant 1$, tous les zéros de P_n sont réels, simples et contenus dans l'intervalle ouvert $]a,b[$. Pour cela on examinera les deux possibilités suivantes :

a) Il n'existe aucun zéro de P_n, contenu dans $]a,b[$, de multiplicité impaire ; dans ce cas, on calculera $\varphi(P_n)$;

b) Il existe de tels zéros, que l'on note $a_1, \dots, a_r$ (chacun étant compté une seule fois) ; dans ce cas, on calculera $\varphi(Q_n)$ où $Q_n(x) = P_n(x)(x-a_1)\dots(x-a_r)$.

6. Dans cette question on fixe un entier $n \geqslant 1$; on note $a_1, \ldots, a_n$ les zéros de P_n ; pour tout G de E_{2n-1}, on écrit $\mathrm{G} = \mathrm{QP}_n + \mathrm{R}$ la division euclidienne de G par P_n.

a) Vérifier que Q et R appartiennent à E_{n-1}.

b) On définit des polynômes L_i, $i = 1, \ldots, n$, par $\mathrm{L}_i(x) = \displaystyle\prod_{j \neq i} \frac{x - a_j}{a_i - a_j}$. Vérifier que l'on a $\mathrm{R}(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{R}(a_i)\mathrm{L}_i(x)$.

c) Déterminer des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que l'on ait, pour tout G de E_{2n-1} : $\varphi(\mathrm{G}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{G}(a_i)$.

d) Quel est le signe de λ_i ?

Troisième partie

Dans cette partie on prend $[a,b] = [-1,1]$, $\alpha_n = 1$ pour tout $n \geqslant 0$, et $\varphi(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout f de $\mathcal{C}([-1,1])$. On considère les fonctions F_n définies par $\mathrm{F}_0(x) = 1$ et pour $n \geqslant 1$,

$$\mathrm{F}_n(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big((x^2-1)^n\Big).$$

7. Préciser le degré de F_n et calculer $\mathrm{F}_n(1)$, $\mathrm{F}'_n(1)$, $\mathrm{F}_n(-1)$, $\mathrm{F}'_n(-1)$. On pourra utiliser la formule de Leibniz donnant $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big((x+1)^n(x-1)^n\Big)$.

8. Montrer que F_n est proportionnel au polynôme P_n introduit à la question **3.b** (on ne demande pas de préciser le coefficient de proportionnalité).

On désigne par $\mathcal{C}^2(]-1,1[)$ l'espace vectoriel des fonctions réelles deux fois continûment dérivables sur $]-1,1[$ et par T l'application linéaire de $\mathcal{C}^2(]-1,1[)$ dans $\mathcal{C}(]-1,1[)$ définie par

$$\mathrm{T}(f)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((x^2-1)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right).$$

9. Vérifier que $\mathrm{T}(\mathrm{F}_n)$ est proportionnel à F_n.

10. Déterminer les vecteurs propres et valeurs propres de l'endomorphisme de E_n, restriction de T à E_n.

11. On fixe un nombre réel γ et on s'intéresse aux solutions de l'équation différentielle

$$\mathrm{T}(f) - \gamma f = 0 \tag{1}$$

qui sont développables en séries entières de la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$.

a) Écrire une relation de récurrence entre c_k et c_{k+2}.

b) Étudier la convergence des deux séries entières, paire et impaire : $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_{2p} x^{2p}$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} c_{2p+1} x^{2p+1}$. Dire dans quels cas ce sont des polynômes et reconnaître ces polynômes.

c) Décrire l'espace des solutions de (1) dans $\mathcal{C}^2(]-1,1[)$.

♦ ♦
♦