Corrigé : polynômes orthogonaux et équations différentielles (X PC 2005)

Première partie

1. Raisonnons par analyse-synthèse. Si $u \in \mathrm{F}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ existent, $u + \lambda v$ est orthogonal à F si et seulement si $\pi(u + \lambda v) = 0_{\mathrm{E}}$, soit, puisque $u \in \mathrm{F}$, $u + \lambda\pi(v) = 0_{\mathrm{E}}$. On a donc nécessairement $u = -\lambda\pi(v)$.
Dans ces conditions, $u + \lambda v = \lambda(v - \pi(v))$ et la condition $\|u + \lambda v\| = \alpha$ impose $|\lambda| = \dfrac{\alpha}{\|v - \pi(v)\|}$ (on a $v - \pi(v) \neq 0_{\mathrm{E}}$ car $v \notin \mathrm{F}$).
Enfin, la condition $\langle u + \lambda v \mid v\rangle > 0$ s'écrit $\lambda\langle v - \pi(v) \mid v\rangle = \lambda\|v - \pi(v)\|^2 > 0$, soit $\lambda > 0$.
On a donc nécessairement $\boxed{\lambda = \dfrac{\alpha}{\|v - \pi(v)\|} \text{ et } u = -\lambda\pi(v).}$
Réciproquement, si λ et u sont ainsi définis, alors $u + \lambda v = \alpha\dfrac{v - \pi(v)}{\|v - \pi(v)\|}$ est bien orthogonal à F, $\langle u + \lambda v \mid v\rangle = \alpha\|v - \pi(v)\| > 0$ et $\|u + \lambda v\| = \alpha$, ce qui assure l'existence et l'unicité d'un tel couple.
On observe que $v - \pi(v)$ est le projeté orthogonal de v sur $\mathrm{F}^{\perp}$ et que $u + \lambda v$ est l'unique vecteur qui lui soit colinéaire, de norme α et orienté dans le même sens.

2. Construisons par récurrence sur n cette famille $(w_0, \dots, w_n)$.

- Si $n = 1$, seul le vecteur $w_0 = \alpha_0\dfrac{v_0}{\|v_0\|}$ répond aux exigences de l'énoncé.
- Si $n > 1$, supposons déjà obtenus les vecteurs $w_0, \dots, w_{n-1}$, et appliquons la question 1 avec $\mathrm{E} = \mathrm{E}_n$, $\mathrm{F} = \mathrm{E}_{n-1}$, $v = v_n$ et $\alpha = \alpha_n$. On notera que puisque la famille $(v_0, \dots, v_{n-1}, v_n)$ est libre, v_n n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(v_0, \dots, v_{n-1})$ donc v n'appartient pas à F.
  D'après la question 1 il existe un unique vecteur $w_n = u + \lambda v$ qui vérifie les conditions $w_n \in \mathrm{E}_n \cap \mathrm{E}_{n-1}^{\perp}$, $\langle w_n \mid v_n\rangle > 0$ et $\|w_n\| = \alpha_n$, ce qui assure l'existence et l'unicité de w_n.
  Notons pour finir qu'ainsi défini on a $w_n \notin \mathrm{E}_{n-1} = \mathrm{Vect}(w_0, \dots, w_{n-1})$ donc la famille $(w_0, \dots, w_n)$ est libre et forme bien une base de E_n.

Remarque. La condition *(ii)* montre que la famille $(w_0, \dots, w_n)$ est orthogonale. La construction que nous venons de réaliser n'est autre qu'une généralisation du procédé de Gram-Schmidt, méthode que l'on retrouve dans le cas où $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$.

Deuxième partie

3.

a) La bilinéarité de $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$ résulte de la linéarité de φ ; la symétrie est évidente. Si $f \in \mathcal{C}([a, b])$, $\langle f \mid f\rangle = \varphi(f^2) \geqslant 0$ car $f^2 \geqslant 0$, et si f n'est pas identiquement nulle, $\varphi(f^2) > 0$ donc $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$ est définie positive ; il s'agit bien d'un produit scalaire.

b) Appliquons la question 2 à la base canonique $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour le produit scalaire ainsi défini. Il existe une unique suite de polynômes deux-à-deux orthogonaux $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

(i) pour tout $n \geqslant 0$, $\mathrm{P}_n \in \mathrm{E}_n$;

(ii) pour tout $n \geqslant 0$, $\varphi(x^n\mathrm{P}_n) > 0$;

(iii) pour tout $n \geqslant 0$, $\varphi(\mathrm{P}_n^2) = \alpha_n^2$.

Notons k_n le coefficient de x^n dans P_n. Alors $\mathrm{P}_n - k_n x^n \in \mathrm{E}_{n-1} = \mathrm{Vect}(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_{n-1})$ donc $\langle \mathrm{P}_n \mid \mathrm{P}_n - k_n x^n\rangle = 0$ soit encore $\|\mathrm{P}_n\|^2 = k_n\langle \mathrm{P}_n \mid x^n\rangle = k_n\varphi(x^n\mathrm{P}_n)$. Ainsi, la condition *(ii)* est équivalente à la condition $k_n > 0$, et les conditions énumérées à la question 2 sont donc bien équivalentes aux conditions énoncées ici.

4.

a) $\deg \mathrm{P}_n(x) = \deg x\mathrm{P}_{n-1} = n$ donc il existe A_n tel que $\mathrm{P}_n(x) - \mathrm{A}_n x\mathrm{P}_{n-1}(x) \in \mathrm{E}_{n-1} = \mathrm{Vect}(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_{n-2}, \mathrm{P}_{n-1})$.

Posons $\mathrm{P}_n(x) - \mathrm{A}_n x\mathrm{P}_{n-1}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \mathrm{P}_k$.

Puisque la famille (P_n) est orthogonale, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\langle \mathrm{P}_k \mid \mathrm{P}_n - \mathrm{A}_n x\mathrm{P}_{n-1}\rangle = \lambda_k\alpha_k^2$ donc $\lambda_k = -\dfrac{\mathrm{A}_n}{\alpha_k^2}\langle \mathrm{P}_k \mid x\mathrm{P}_{n-1}\rangle$.

Or $\langle P_k \mid xP_{n-1}\rangle = \varphi(xP_kP_{n-1}) = \langle xP_k \mid P_{n-1}\rangle$ et lorsque $k \leqslant n-2$, $xP_k \in E_{n-2}$ et $P_{n-1} \in E_{n-2}^{\perp}$ donc $\lambda_k = 0$.
En posant $B_n = \lambda_{n-1}$ et $C_n = \lambda_{n-2}$ on obtient bien $P_n(x) = (A_nx + B_n)P_{n-1}(x) + C_nP_{n-2}(x)$.

b) D'après la question précédente on doit avoir $k_n - A_nk_{n-1} = 0$ donc $\boxed{A_n = \dfrac{k_n}{k_{n-1}}.}$

Avec les notations de la question précédente, $C_n = \lambda_{n-2} = -\dfrac{A_n}{\alpha_{n-2}^2}\langle xP_{n-2} \mid P_{n-1}\rangle$.

On a $\langle xP_{n-2} \mid P_{n-1}\rangle = \langle k_{n-2}x^{n-1} \mid P_{n-1}\rangle = k_{n-2}\langle x^{n-1} \mid P_{n-1}\rangle$ car $P_{n-1} \in E_{n-2}^{\perp}$ et pour les mêmes raisons, $k_{n-1}\langle x^{n-1} \mid P_{n-1}\rangle = \|P_{n-1}\|^2 = \alpha_{n-1}^2$ donc $\langle xP_{n-2} \mid P_{n-1}\rangle = \dfrac{k_{n-2}}{k_{n-1}}\alpha_{n-1}^2$ et $\boxed{C_n = -\dfrac{k_nk_{n-2}}{k_{n-1}^2}\Big(\dfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-2}}\Big)^2.}$

5.

a) Suivant cette hypothèse, on peut écrire $P_n(x) = Q_n(x)^2R_n(x)$ où Q_n est un polynôme scindé dont les racines sont dans $]a,b[$ et R_n un polynôme n'admettant pas de racines dans $]a,b[$, donc de signe constant sur cet intervalle. Et quitte à multiplier P_n par -1 on supposera que pour tout $x \in]a,b[$, $R_n(x) > 0$ et donc $P_n(x) \geqslant 0$.
On a $\varphi(P_n) = \langle 1 \mid P_n\rangle = 0$ puisque $1 \in E_{n-1}$ et $P_n \in E_{n-1}^{\perp}$. Mais alors, P_n étant positive, on devrait en conclure que $P_n = 0$, ce qui est absurde. Cette situation doit donc être rejetée.

b) Il existe donc des zéros dans $]a,b[$ de multiplicités impaires. Notons-les $a_1,\dots,a_r$ et posons $Q_n = P_n(x)(x-a_1)\cdots(x-a_r)$.
Comme à la question précédente on a pour tout $x \in]a,b[$, $Q_n(x) \geqslant 0$ et $\varphi(Q_n) = \langle (x-a_1)\cdots(x-a_r) \mid P_n\rangle$.
Si on avait $r < n$ on aurait $(x-a_1)\cdots(x-a_r) \in E_{n-1}$ et $P_n \in E_{n-1}^{\perp}$ donc $\varphi(Q_n) = 0$ et on devrait en déduire que $Q_n = 0$, ce qui est absurde. On en déduit que $r = n$, et alors $P_n = k_n(x-a_1)\cdots(x-a_n)$, ce qui prouve que P_n est scindé à racines simples, toutes ses racines étant contenues dans $]a,b[$.

6.

a) Par définition d'une division euclidienne, $\deg R \leqslant \deg P_n - 1 = n-1$ et $R \in E_{n-1}$.
Si $\deg G \leqslant n-1$ on a $Q = 0$ et si $\deg G \geqslant n$ alors $\deg Q \leqslant \deg G - \deg P_n \leqslant 2n-1-n = n-1$ donc dans les deux cas $Q \in E_{n-1}$.

b) Posons $\widetilde{R}(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} R(a_i)L_i(x)$. On a $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ donc pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\widetilde{R}(a_j) = R(a_j)$. Le polynôme $\widetilde{R} - R$ est de degré inférieur ou égal à $n-1$ et possède au moins n racines distinctes donc est le polynôme nul, donc $R(x) = \widetilde{R}(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} R(a_i)L_i$.

c) On a $\varphi(G) = \varphi(QP_n) + \varphi(R) = \langle Q_n \mid P_n\rangle + \varphi(R) = \varphi(R)$ puisque $Q_n \in E_{n-1}$ et $P_n \in E_{n-1}^{\perp}$.
$\varphi(R) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} R(a_i)\varphi(L_i)$ et $G(a_i) = R(a_i)$ car $Q(a_i) = 0$ donc $\varphi(G) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_iG(a_i)$ avec $\boxed{\lambda_i = \varphi(L_i).}$

d) Le polynôme L_j^2 est de degré $2n-2$ donc appartient à E_{2n-1} ; on peut lui appliquer le résultat précédent :
$\varphi(L_j^2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_iL_j^2(a_i) = \lambda_j$. Mais $L_j(x)^2 \geqslant 0$ donc $\varphi(L_j^2) \geqslant 0$, ce qui montre que $\lambda_j \geqslant 0$.

Troisième partie

7. On a $\deg(x^2-1)^n = 2n$ donc $\deg F_n = 2n - n = n$.
D'après la formule de Leibniz, $F_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(x+1)^{n-k}\frac{n!}{k!}(x-1)^k = n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(x+1)^{n-k}(x-1)^k$.

On en déduit $F_n(1) = n!\dbinom{n}{0}^2(1+1)^n$ soit $\boxed{F_n(1) = 2^nn!}$ et $F_n(-1) = n!\dbinom{n}{n}^2(-1-1)^n$ donc $\boxed{F_n(-1) = (-2)^nn!.}$

Dérivons maintenant $n+1$ fois à l'aide de la formule de Leibniz : $F_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(x+1)^{n-k}\frac{n!}{(k-1)!}(x-1)^{k-1}$.

On en déduit $F_n'(1) = \dbinom{n+1}{1}\dfrac{n!}{(n-1)!}n!(1+1)^{n-1}$ soit $\boxed{F_n'(1) = n2^{n-1}(n+1)!}$ et $F_n'(-1) = \dbinom{n+1}{n}n!\dfrac{n!}{(n-1)!}(-1-1)^{n-1}$ soit $\boxed{F_n'(-1) = n(-2)^{n-1}(n+1)!.}$

8. Nous avons déjà que F_n appartient à E_n et le coefficient $k_n = \dfrac{(2n)!}{n!}$ de x^n dans F_n est strictement positif.

Supposons $m < n$ et calculons $\varphi(\mathrm{F}_m\mathrm{F}_n) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{F}_m(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big((x^2-1)^n\Big)\mathrm{d}x$ en effectuant $m+1$ intégrations par parties successives suivant le schéma :

$$\begin{array}{c|cc|}
+ & \mathrm{F}_m(x) & \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big((x^2-1)^n\Big) \\
- & \mathrm{F}_m'(x) & \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\Big((x^2-1)^n\Big) \\
 & \vdots & \vdots \\
(-1)^m & \mathrm{F}_m^{(m)}(x) & \dfrac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}x^{n-m}}\Big((x^2-1)^n\Big) \\
(-1)^{m+1} & 0 & \dfrac{\mathrm{d}^{n-m-1}}{\mathrm{d}x^{n-m-1}}\Big((x^2-1)^n\Big)
\end{array}$$

$\varphi(\mathrm{F}_m\mathrm{F}_n) = \left[\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \mathrm{F}_m^{(k)}(x)\frac{\mathrm{d}^{n-k-1}}{\mathrm{d}x^{n-k-1}}\Big((x^2-1)^n\Big)\right]_{-1}^{1}$ et puisque 1 et -1 sont racines d'ordre $k+1 \geqslant 1$ de $\dfrac{\mathrm{d}^{n-k-1}}{\mathrm{d}x^{n-k-1}}\Big((x^2-1)^n\Big)$ on a $\varphi(\mathrm{F}_m\mathrm{F}_n) = 0$.

La calcul que $\varphi(\mathrm{F}_n^2)$ est presque identique, sauf qu'on ne fait que n intégrations par parties, pour obtenir :

$$\varphi(\mathrm{F}_n^2) = (-1)^n \int_{-1}^{1} \mathrm{F}_n^{(n)}(x)(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x = (2n)! \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n = \beta_n.$$

Cette quantité β_n est strictement positive, et l'unicité de la solution à la question 3.b nous permet d'affirmer que $\mathrm{P}_n = \dfrac{1}{\sqrt{\beta_n}}\mathrm{F}_n$, soit $\mathrm{F}_n = \sqrt{\beta_n}\mathrm{P}_n$. Le polynôme F_n est bien proportionnel à P_n.

9. Observons déjà que $\mathrm{T}(\mathrm{F}_n) \in \mathrm{E}_n$ puisque $\deg \mathrm{T}(\mathrm{F}_n) = n$. Pour montrer que $\mathrm{T}(\mathrm{F}_n)$ est proportionnel à F_n il suffit de montrer qu'il appartient à $\mathrm{E}_{n-1}^{\perp}$, autrement dit que $\varphi(\mathrm{P}\mathrm{T}(\mathrm{F}_n)) = 0$ lorsque $\deg \mathrm{P} \leqslant n-1$.
Une première intégration par partie donne

$$\varphi(\mathrm{PT}(\mathrm{F}_n)) = \int_{-1}^{1} \mathrm{P}(x)\mathrm{T}(\mathrm{F}_n)(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\Big[\mathrm{P}(x)(x^2-1)\mathrm{F}_n'(x)\Big]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1}(x^2-1)\mathrm{P}'(x)\mathrm{F}_n'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{1}(x^2-1)\mathrm{P}'(x)\mathrm{F}_n'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Une seconde intégration par parties donne

$$\varphi(\mathrm{PT}(\mathrm{F}_n)) = \underbrace{\Big[-(x^2-1)\mathrm{P}'(x)\mathrm{F}_n(x)\Big]_{-1}^{1}}_{=0} + \int_{-1}^{1}\Big(2x\mathrm{P}'(x) + (x^2-1)\mathrm{P}''(x)\Big)\mathrm{F}_n(x)\,\mathrm{d}x = \varphi\Big((2x\mathrm{P}'(x) + (x^2-1)\mathrm{P}''(x))\mathrm{F}_n(x)\Big)$$

Mais $\deg(2x\mathrm{P}'(x) + (x^2-1)\mathrm{P}''(x)) \leqslant n-1$ et $\mathrm{F}_n \in \mathrm{E}_{n-1}^{\perp}$ donc $\varphi(\mathrm{PT}(\mathrm{F}_n)) = 0$, ce qui montre que $\mathrm{T}(\mathrm{F}_n)$ est proportionnel à F_n.

10. Pour obtenir le facteur de proportionnalité il suffit de considérer le terme de plus haut degré : si celui de F_n est noté c_n, celui de $\mathrm{T}(\mathrm{F}_n)$ égal à $n(n+1)c_n$ donc $\mathrm{T}(\mathrm{F}_n) = n(n+1)\mathrm{F}_n$.
Notons T_n la restriction de T à E_n. Chaque F_k pour $k \in [\![0,n]\!]$ est vecteur propre de T_n dans E_n ; puisqu'ils forment une base de E_n on en déduit que $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}_n) = \Big\{k(k+1) \;\Big|\; k \in [\![0,n]\!]\Big\}$. Chacun des sous-espaces propres associés à ces valeurs est de dimension 1 et engendré par F_k.

11.

a) Si $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ alors $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kc_k x^{k-1}$ et

$$(x^2-1)f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} kc_k x^{k+1} - \sum_{k=1}^{+\infty} kc_k x^{k-1} = \sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)c_{k-1}x^k - \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)c_{k+1}x^k = c_1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\Big((k-1)c_{k-1} - (k+1)c_{k+1}\Big)x^k.$$

On en déduit que $\mathrm{T}(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\Big((k-1)c_{k-1} - (k+1)c_{k+1}\Big)x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\Big(kc_k - (k+2)c_{k+2}\Big)x^k.$

Par unicité du développement en série entière on en déduit que $\mathrm{T}(f) = \gamma f$ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(k+1)\Big(kc_k - (k+2)c_{k+2}\Big) = \gamma c_k$, soit $\boxed{c_{k+2} = \dfrac{k(k+1)-\gamma}{(k+1)(k+2)}c_k.}$

b) Notons $S_p(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{2k} x^{2k}$ et $S_i = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{2k+1} x^{2k+1}$.

Si $c_0 = 0$ alors $S_p(x) = 0$; si $c_0 \neq 0$ et s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma = (2p)(2p+1)$ alors $c_{2k} = 0$ pour $k \geqslant p+1$ et S_p est un polynôme de degré $2p$, proportionnel à F_{2p} d'après la question 10.
Dans les autres cas on a $c_{2k} \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et le critère de d'Alembert, utilisé de conserve avec la formule de récurrence de la question précédente, montre que le rayon de convergence est égal à 1.

C'est la même chose pour S_i : si $c_1 = 0$ alors $S_i(x) = 0$; si $c_1 \neq 0$ et s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma = (2p+1)(2p+2)$ alors $c_{2k+1} = 0$ pour $k \geqslant p+1$ et S_i est un polynôme de degré $2p+1$, proportionnel à F_{2p+1} d'après la question 10.
Dans les autres cas on a $c_{2k+1} \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et le critère de d'Alembert, utilisé de conserve avec la formule de récurrence de la question précédente, montre que le rayon de convergence est égal à 1.

c) L'équation (1) est une équation différentielle linéaire du second ordre : $(x^2+1)f''(x) + 2xf'(x) - \gamma f(x) = 0$. Ses solutions forment donc un espace vectoriel de dimension 2.

Considérons la suite (c_n) définie par $c_0 = c_1 = 1$ et la relation $c_{k+2} = \dfrac{k(k+1)-\gamma}{(k+1)(k+2)} c_k$. Les deux fonctions S_p et S_i définies (au moins) sur $]-1,1[$ sont solutions de cette équation et ne sont pas proportionnelles car l'une est paire et l'autre impaire. Elles forment donc une base de l'espace des solutions. Toute solution de (1) dans $\mathcal{C}^2(]-1,1[)$ s'écrit donc $f = \lambda S_p + \mu S_i$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Notons que lorsque, de plus, il existe un entier n tel que $\gamma = n(n+1)$, l'une de ces deux solutions S_p ou S_i est un polynôme (suivant la parité de n).

