Endomorphismes échangeurs (Mines PSI 2017)

Durée : 4 heures

Dans tout le problème, les espaces vectoriels considérés ont $\mathbb{C}$, le corps des complexes, pour corps de base.
Étant donnés deux entiers naturels n et p non nuls, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{C}$ (et $\mathrm{O}_{n,p}$ sa matrice nulle) et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ celui des matrices carrées à n lignes et à coefficients dans $\mathbb{C}$ (et O_n sa matrice nulle).
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On note $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

Un endomorphisme u de E est dit *échangeur* lorsqu'il existe des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}, \quad u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{G} \quad \text{et} \quad u(\mathrm{G}) \subset \mathrm{F}.$$

Étant donnés deux endomorphismes u et v de E, on dit que v est *semblable* à u lorsqu'il existe un automorphisme ϕ de E tel que $v = \phi \circ u \circ \phi^{-1}$. On notera que dans ce cas $u = \phi^{-1} \circ v \circ (\phi^{-1})^{-1}$, si bien que u est semblable à v.

On dit que u est *de carré nul* lorsque u^2 est l'endomorphisme nul de E. On dit que u est *nilpotent* lorsqu'il existe un entier naturel $n \geqslant 1$ tel que $u^n = 0$. Une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *de carré nul* lorsque $\mathrm{A}^2 = \mathrm{O}_n$.

L'objectif du problème est d'établir, pour un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, l'équivalence entre les conditions suivantes :

(C1) l'endomorphisme u est échangeur ;

(C2) il existe $a \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et $b \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, tous deux de carré nul, tels que $u = a + b$;

(C3) les endomorphismes u et $-u$ sont semblables.

Chacune des parties **I** et **II** est indépendante des autres. Les résultats de la partie **IV** sont essentiels au traitement des parties **V** et **VI**.

I Quelques considérations en dimension 2

On se donne ici un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 et un endomorphisme u de E.

1. Montrer que si u vérifie la condition **(C3)** alors u est de trace nulle.

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose u de trace nulle et de déterminant non nul.
On choisit un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = -\det u$.

2. Montrer que le polynôme caractéristique de u est égal à $\chi_u(x) = x^2 - \delta^2$, en déduire le spectre de u et préciser la dimension des sous-espaces propres.

3. Expliciter, à l'aide de vecteurs propres de u, une droite vectorielle D telle que $u(\mathrm{D}) \not\subset \mathrm{D}$ et en déduire que u est échangeur.

II La condition (C1) implique (C2) et (C3)

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. On considère dans $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{C})$ la matrice

$$\mathrm{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O}_n & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{O}_p \end{array}\right).$$

4. Calculer le carré de la matrice $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O}_n & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{O}_{p,n} & \mathrm{O}_p \end{array}\right)$ de $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{C})$. Montrer ensuite que M est la somme de deux matrices de carré nul.

5. On considère dans $\mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale par blocs

$$\mathrm{D} = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & \mathrm{O}_{n,p} \\ \hline \mathrm{O}_{p,n} & -\mathrm{I}_p \end{array}\right).$$

Montrer que D est inversible, calculer D^{-1} puis DMD^{-1}, et en déduire que M est semblable à $-\mathrm{M}$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on se donne un endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que u est échangeur et on se donne donc une décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ dans laquelle F et G sont des sous-espaces vectoriels vérifiant $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{G}$ et $u(\mathrm{G}) \subset \mathrm{F}$.

6. On suppose ici F et G tous deux non nuls.
On se donne une base $(f_1,\dots,f_n)$ de F et une base $(g_1,\dots,g_p)$ de G. La famille $\mathbf{B} = (f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_p)$ est donc une base de E. Compte-tenu des hypothèses, décrire la forme de la matrice u dans $\mathbf{B}$.

7. Déduire des questions précédentes que u vérifie **(C2)** et **(C3)**. *On n'oubliera pas de considérer le cas où l'un des sous-espaces* F *ou* G *est nul.*

III La condition (C2) implique (C1) : cas d'un automorphisme

Dans cette partie, u désigne un automorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que

$$u = a + b \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 = 0.$$

8. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = 0$. Comparer $\operatorname{Ker} f$ à $\operatorname{Im} f$ et en déduire $\dim \operatorname{Ker} f \geqslant \dfrac{\dim \mathrm{E}}{2}$.

9. Démontrer que $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} a \oplus \operatorname{Ker} b$, et que $\operatorname{Ker} a = \operatorname{Im} a$ et $\operatorname{Ker} b = \operatorname{Im} b$.

10. En déduire que u est échangeur.

IV Intermède : un principe de décomposition

On se donne dans cette partie un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie, ainsi qu'un endomorphisme f de E. On se donne un nombre complexe λ arbitraire. On pose $v = f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

11. Montrer que la suite $\left(\operatorname{Ker}(v^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.

12. Montrer qu'il existe un entier naturel p tel que $\forall k \geqslant p$, $\operatorname{Ker}(v^k) = \operatorname{Ker}(v^p)$. *On pourra introduire la plus grande dimension possible pour un sous-espace vectoriel de la forme* $\operatorname{Ker}(v^k)$ *pour* $k \in \mathbb{N}$.
Montrer qu'alors $\operatorname{Ker}(v^p) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker}(v^k)$ et que p peut être choisi parmi les entiers pairs.

Dans la suite de cette partie, on fixe un entier naturel pair p donné par la question 12 et l'on pose

$$\mathrm{E}^c_\lambda(f) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker}(v^k) = \operatorname{Ker}(v^p).$$

On notera que $\mathrm{E}^c_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

13. Montrer que $\mathrm{E}^c_\lambda(f) = \operatorname{Ker}(v^{2p})$ et en déduire $\mathrm{E} = \mathrm{E}^c_\lambda(f) \oplus \operatorname{Im}(v^p)$.
Montrer en outre que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{E}^c_\lambda(f)$ et $\operatorname{Im}(v^p)$ sont tous deux stables par f.

14. Montrer que λ n'est pas valeur propre de l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Im}(v^p)$.
Montrer que si $\mathrm{E}^c_\lambda(f)$ n'est pas nul alors λ est l'unique valeur propre de l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{E}^c_\lambda(f)$.

15. On se donne ici un nombre complexe μ différent de λ, et on suppose $\operatorname{Sp}(f) \subset \{\lambda, \mu\}$.
Montrer que $\operatorname{Im}(v^p) \subset \mathrm{E}^c_\mu(f)$, puis que $\mathrm{E} = \mathrm{E}^c_\lambda(f) \oplus \mathrm{E}^c_\mu(f)$. *On pourra s'intéresser au polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par* f *sur* $\operatorname{Im}(v^p)$.

V La condition (C2) implique (C1) : cas non bijectif

Dans cette partie, on admet la validité de l'énoncé suivant.
Théorème : tout endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension finie est échangeur.

On se donne ici un endomorphisme non bijectif u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que

$$u = a + b \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 = 0.$$

16. Montrer que a et b commutent avec u^2.

On fixe maintenant un entier pair p tel que $\mathrm{E}^c_0(u) = \operatorname{Ker}(u^p)$, donné par la question 12.

17. Montrer que le sous-espace vectoriel $G = \mathrm{Im}(u^p)$ est stable par a et b et que les endomorphismes induits a_G et b_G sont de carré nul.

18. En déduire que u est échangeur. *On pourra utiliser, entre autres, le résultat final de la partie **III**.*

VI La condition (C3) implique (C1)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Un endomorphisme u de E est dit *indécomposable* lorsque

(i) la condition **(C3)** est vérifiée par u ;

(ii) il n'existe aucune décomposition $E = F \oplus G$ dans laquelle F et G sont des sous-espaces non nuls, stables par u et tels que les endomorphismes induits u_F et u_G vérifient tous deux la condition **(C3)**.

Jusqu'à la question 23 incluse, on se donne un endomorphisme indécomposable u de E. On dispose en particulier d'un automorphisme ϕ de E tel que

$$-u = \phi \circ u \circ \phi^{-1}.$$

19. Montrer que ϕ^2 commute avec u.

20. Justifier que ϕ^2 possède au moins une valeur propre λ.

21. On pose $v = \phi^2 - \lambda \mathrm{Id}$. D'après les résultats de la partie IV, il existe un entier pair p tel que $E = \mathrm{Ker}(v^p) \oplus \mathrm{Im}(v^p)$. Montrer que $\mathrm{Ker}(v^p)$ et $\mathrm{Im}(v^p)$ sont stables par u et par ϕ, et en déduire que $\phi^2 = \lambda \mathrm{Id}$.

22. En déduire que les valeurs propres de ϕ sont parmi α et $-\alpha$, pour un certain nombre complexe non nul α.

23. En déduire que u est échangeur. *On pourra appliquer le résultat final de la question 15.*

24. En déduire plus généralement que, pour tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, la condition **(C1)** implique la condition **(C1)**. *On procédera par récurrence sur* $\dim E$, *en distinguant le cas où u est indécomposable du cas où u ne l'est pas.*

♦ ♦
♦