Corrigé : endomorphismes échangeurs (Mines PSI 2017)

I Quelques considérations en dimension 2

1. Si u et $-u$ sont semblables, il existe $\phi \in \mathcal{GL}(\mathrm{E})$ tel que $-u = \phi \circ u \circ \phi^{-1}$. Alors

$$\operatorname{tr}(-u) = \operatorname{tr}\Big(\phi \circ (u \circ \phi^{-1})\Big) = \operatorname{tr}\Big((u \circ \phi^{-1}) \circ \phi\Big) = \operatorname{tr} u$$

et $\operatorname{tr}(-u) = -\operatorname{tr} u$ donc $\operatorname{tr} u = 0$.

2. Puisque E est de dimension 2, $\chi_u(x) = x^2 - (\operatorname{tr} u)x + (\det u) = x^2 - \delta^2 = (x-\delta)(x+\delta)$. On a $-\delta \neq \delta$ car $\det u \neq 0$ donc $\operatorname{Sp}(u) = \{-\delta, \delta\}$.
Chacune des deux valeurs propres est de multiplicité égale à 1 donc les deux sous-espaces propres sont de dimension 1.

3. Considérons deux vecteurs propres e_1 et e_2 de E, respectivement associés aux valeurs propres δ et $-\delta$, et posons $x = e_1 + e_2$, $y = e_1 - e_2$.
Puisque la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible, la famille (x, y) est une base de E. Posons $\mathrm{D}_1 = \operatorname{Vect}(x)$ et $\mathrm{D}_2 = \operatorname{Vect}(y)$; on a $\mathrm{E} = \mathrm{D}_1 \oplus \mathrm{D}_2$. Par ailleurs, $u(x) = \delta y$ et $u(y) = \delta x$ donc $u(\mathrm{D}_1) \subset \mathrm{D}_2$ et $u(\mathrm{D}_2) \subset \mathrm{D}_1$: u est échangeur.

II La condition (C1) implique (C2) et (C3)

4. Le calcul par bloc montre que $\left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O}_n & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{O}_{p,n} & \mathrm{O}_p \end{array}\right)^2 = \mathrm{O}_n$, donc $\mathrm{M} = \mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2$ avec $\mathrm{M}_1 = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O}_n & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{O}_{p,n} & \mathrm{O}_p \end{array}\right)$ et $\mathrm{M}_2 = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O}_n & \mathrm{O}_{n,p} \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{O}_p \end{array}\right)$, et d'après ce qui précède $\mathrm{M}_1^2 = \mathrm{M}_2^2 = \mathrm{O}_{n+p}$.

5. $\det \mathrm{D} = (-1)^p \neq 0$ donc D est inversible, et $\mathrm{D}^2 = \mathrm{I}_{n+p}$ donc $\mathrm{D}^{-1} = \mathrm{D}$. On calcule ensuite (par blocs) $\mathrm{DMD}^{-1} = \mathrm{DMD} = -\mathrm{M}$ donc M est semblable à $-\mathrm{M}$.

6. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u(f_i) \in \operatorname{Vect}(g_1, \dots, g_p)$ et pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $u(g_j) \in \operatorname{Vect}(f_1, \dots, f_n)$ donc dans la base $\mathbf{B}$ la matrice associée à u est de la même forme que la matrice M introduite dans cette partie.

7. Si F et G sont non nuls, posons $\operatorname{Mat}_{\mathbf{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O}_n & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{O}_p \end{array}\right)$ et considérons les deux endomorphismes a et b de E définis respectivement par $\operatorname{Mat}_{\mathbf{B}}(a) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O}_n & \mathrm{O}_{n,p} \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{O}_p \end{array}\right)$ et $\operatorname{Mat}_{\mathbf{B}}(b) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{O}_n & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{O}_{p,n} & \mathrm{O}_p \end{array}\right)$.
On a $u = a + b$ et la question 4. a montré que $a^2 = b^2 = 0$ donc la condition **(C2)** est vérifiée.
Notons maintenant ϕ l'endomorphisme de E défini par $\operatorname{Mat}_{\mathbf{B}}(\phi) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_n & \mathrm{O}_{n,p} \\ \hline \mathrm{O}_{p,n} & -\mathrm{I}_p \end{array}\right)$. La question 5. prouve que $\phi \circ u \circ \phi^{-1} = -u$ donc la condition **(C3)** est vérifiée.

Si $\mathrm{G} = \{0_\mathrm{E}\}$ alors $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ et $u(\mathrm{F}) = \{0_\mathrm{E}\}$ donc u est l'endomorphisme nul, qui vérifie **(C2)** (avec $a = b = 0$) et **(C3)** (car $-u = u = 0$). Il en est de même si $\mathrm{F} = \{0_\mathrm{E}\}$.

III La condition (C2) implique (C1) : cas d'un automorphisme

8. $f^2 = 0$ est équivalent à dire que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ donc $\dim \operatorname{Im} f \leqslant \dim \operatorname{Ker} f$, et d'après le théorème du rang, $\dim \mathrm{E} = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f \leqslant 2 \dim \operatorname{Ker} f$.

9. Montrons déjà que la somme $\operatorname{Ker} a + \operatorname{Ker} b$ est directe : si $x \in \operatorname{Ker} a \cap \operatorname{Ker} b$ alors $a(x) = b(x) = 0_\mathrm{E}$ donc $u(x) = 0_\mathrm{E}$. Mais u est un automorphisme donc $x = 0_\mathrm{E}$. La somme est bien directe.
Toujours car u est un automorphisme, on peut écrire $\mathrm{Id} = a \circ u^{-1} + b \circ u^{-1}$. Ainsi, $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 = a \circ u^{-1}(x)$ et $x_2 = b \circ u^{-1}(x)$. Et puisque $a^2 = b^2 = 0$ on a $x_1 \in \operatorname{Ker} a$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} b$. On a donc bien $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} a \oplus \operatorname{Ker} b$.

Puisque $a^2 = b^2 = 0$ on a déjà $\operatorname{Im} a \subset \operatorname{Ker} a$ et $\operatorname{Im} b \subset \operatorname{Ker} b$. Mais si l'une de ces deux inclusions était stricte, par exemple la première, on aurait $\dim \operatorname{Ker} a > \dfrac{\dim \mathrm{E}}{2}$ et $\dim \operatorname{Ker} b \geqslant \dfrac{\dim \mathrm{E}}{2}$ donc $\dim \operatorname{Ker} a + \dim \operatorname{Ker} b > \dim \mathrm{E}$, ce qui est incompatible avec l'égalité $\mathrm{E} = \operatorname{Ker} \mathrm{A} \oplus \operatorname{Ker} b$. On a donc bien $\operatorname{Ker} a = \operatorname{Im} a$ et $\operatorname{Ker} b = \operatorname{Im} b$.

10. Pour tout $x \in \operatorname{Ker} a$, $u(x) = a(x) + b(x) = b(x) \in \operatorname{Im} b = \operatorname{Ker} b$ donc $u(\operatorname{Ker} a) \subset \operatorname{Ker} b$. De même, $u(\operatorname{Ker} b) \subset \operatorname{Ker} a$ et en posant $F = \operatorname{Ker} a$ et $G = \operatorname{Ker} b$ on constate que u est échangeur.

IV Intermède : un principe de décomposition

11. Si $v^k(x) = 0_E$ alors $v^{k+1}(x) = v(0_E) = 0_E$ donc $\operatorname{Ker}(v^k) \subset \operatorname{Ker}(v^{k+1})$.

12. La suite $\left(\dim \operatorname{Ker}(v^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers croissante et majorée par $\dim E$; elle est donc convergente. Or une suite d'entiers convergente ne peut qu'être stationnaire : en effet il existe un rang p à partir duquel $\left|\dim \operatorname{Ker}(v^{k+1}) - \dim(\operatorname{Ker} v^k)\right| < 1$, ce qui impose $\dim \operatorname{Ker}(v^{k+1}) = \dim \operatorname{Ker}(v^k)$.

On a alors $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Ker}(v^k) = \bigcup_{k=0}^{p} \operatorname{Ker}(v^k) = \operatorname{Ker}(v^p)$ puisque pour tout $k \leqslant p$, $\operatorname{Ker}(v^k) \subset \operatorname{Ker}(v^p)$.
Enfin, quitte à remplacer p par $p+1$ on peut supposer pour la suite que p est un entier pair.

13. Puisque $p \leqslant 2p$ on a $\operatorname{Ker}(v^{2p}) = \operatorname{Ker}(v^p)$ donc $E^c_\lambda(f) = \operatorname{Ker}(v^{2p})$.
Considérons $y \in \operatorname{Ker}(v^p) \cap \operatorname{Im}(v^p)$: il existe $x \in E$ tel que $y = v^p(x)$ et $v^p(y) = 0_E$, donc $v^{2p}(x) = 0_E$. Mais $\operatorname{Ker}(v^{2p}) = \operatorname{Ker}(v^p)$ donc $v^p(x) = 0_E$, soit $y = 0_E$: la somme $\operatorname{Ker}(v^p) \oplus \operatorname{Im}(v^p)$ est directe.
D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker}(v^p) \oplus \operatorname{Im}(v^p) = \dim \operatorname{Ker}(v^p) + \dim \operatorname{Im}(v^p) = \dim E$, donc $E = \operatorname{Ker}(v^p) \oplus \operatorname{Im}(v^p) = E^c_\lambda(f) \oplus \operatorname{Im}(v^p)$.
Enfin, $v^p = (f - \lambda \mathrm{Id})^p$ est un polynôme en f donc commute avec f, avec pour conséquence que $\operatorname{Ker}(v^p) = E^c_\lambda(f)$ et $\operatorname{Im}(v^p)$ sont stables par f.

14. Supposons l'existence de $y = v^p(x) \in \operatorname{Im}(v^p)$ qui soit vecteur propre pour la valeur propre λ de f. On aurait $f(y) = \lambda y$ soit $v(y) = 0_E$, ou encore $v^{p+1}(x) = 0_E$. Mais $\operatorname{Ker}(v^{p+1}) = \operatorname{Ker}(v^p)$ donc $y = v^p(x) = 0_E$, ce qui est absurde concernant un vecteur propre. λ n'est donc pas valeur propre de la restriction de f à $\operatorname{Im}(v^p)$.

Supposons $E^c_\lambda(f)$ non réduit au seul vecteur nul, et considérons une valeur propre μ de la restriction de f à ce sous-espace (il en existe au moins une s'agissant d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel). Il existe un vecteur non nul $x \in E^c_\lambda(f) = \operatorname{Ker}(v^p)$ tel que $f(x) = \mu x$, soit $v(x) = (\mu - \lambda)x$. Mais dans ce cas, $0_E = v^p(x) = (\mu-\lambda)^p x$ donc $(\mu - \lambda)^p = 0$, ce qui impose $\mu = \lambda$.
λ est donc la seule valeur propre de la restriction de f à $E^c_\lambda(f)$.

15. Par hypothèse, seuls λ et μ peuvent être valeurs propres de f, donc aussi de ses restrictions à un sous-espace stable. C'est le cas en particulier de la restriction de f à $\operatorname{Im}(v^p)$. Mais d'après la question précédente, λ ne peut être valeur propre de celle-ci, donc ne subsiste que μ.
Posons $u = f - \mu \mathrm{Id}_E$. La seule valeur propre possible pour la restriction de u à $\operatorname{Im}(v^p)$ est 0 donc cette restriction est nilpotente. Il existe donc un entier k tel que $\operatorname{Im}(v^p) \subset \operatorname{Ker}(u^k)$ et donc $\operatorname{Im}(v^p) \subset E^c_\mu(f)$.

Il en résulte que $E = E^c_\lambda(f) + E^c_\mu(f)$. Reste à montrer que la somme est directe.
Dans une base adaptée à la décomposition $E = E^c_\lambda(f) \oplus \operatorname{Im}(v^p)$ la matrice associée à f est (d'après la question 13) de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & O_{r,s} \\ \hline O_{s,r} & B \end{array}\right)$ avec $r = \dim E^c_\lambda(f)$ et $s = \dim \operatorname{Im}(v^p)$.
D'après la questions 14 le polynôme caractéristique de A est $(X-\lambda)^r$ et celui de B, $(X-\mu)^s$ donc $\chi_f(X) = (X-\lambda)^r(X-\mu)^s$.
Ceci prouve que la dimension de $E^c_\lambda(f)$ est égale à la multiplicité r de λ dans χ_f.
Mais pour des raisons symétriques la dimension de $E^c_\mu(f)$ est égale à la multiplicité s de μ dans χ_f.
On a donc $E = E^c_\lambda(f) + E^c_\mu(f)$ avec $\dim E = \dim E^c_\lambda(f) + \dim E^c_\mu(f)$ donc d'après la formule de Grassmann, $\dim E^c_\lambda(f) \cap E^c_\mu(f) = 0$: la somme est bien directe.

V La condition (C2) implique (C1) : cas non bijectif

16. On calcule $u^2 = a^2 + a\circ b + b\circ a + b^2 = a\circ b + b\circ a$ donc $a\circ u^2 = a^2\circ b + a\circ b\circ a = a\circ b\circ a$ et $u^2\circ a = a\circ b\circ a + b\circ a^2 = a\circ b\circ a$. Ainsi, a et u^2 commutent. Il en est de même de b et u^2.

17. En outre, a et b commutent avec toute puissance de u^2, donc avec u^p puisque p est pair. Si $y \in G = \operatorname{Im}(u^p)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u^p(x)$ et ainsi $a(u^p(x)) = u^p(a(x)) \in \operatorname{Im}(u^p) = G$: G est stable par a. Il en est bien entendu de même pour b.
Pour tout $x \in G$, $a_G^2(x) = a^2(x) = 0_E$ donc a_G est de carré nul. Il en est de même de b_G.

18. Posons $F = E_0^c(u)$. D'après la question 13 on a $E = F \oplus G$.
La restriction de u à F est nilpotente donc d'après le résultat admis cette restriction est échangeur : il existe F_1 et F_2 tels que $F = F_1 \oplus F_2$ et $u(F_1) \subset F_2$, $u(F_2) \subset F_1$.
D'après la question 14, 0 n'est pas valeur propre de la restriction de u à G donc celle-ci est un automorphisme. D'après la partie III cette restriction est échangeur : il existe G_1 et G_2 tels que $G = G_1 \oplus G_2$ avec $u(G_1) \subset G_2$ et $u(G_2) \subset G_1$.
Ainsi, $E = F \oplus G = (F_1 \oplus G_1) \oplus (F_2 \oplus G_2)$ et $u(F_1 \oplus G_1) \subset F_2 \oplus G_2$ et $u(F_2 \oplus G_2) \subset (F_1 \oplus G_1)$ donc u est bien échangeur.

VI La condition (C3) implique (C1)

19. On a $\phi^2 \circ u \circ \phi^{-2} = -\phi \circ u \circ \phi^{-1} = u$, donc $\phi^2 \circ u = u \circ \phi^2$.

20. S'agissant d'espaces vectoriels complexes on sait que ϕ^2 possède au moins une valeur propre λ (son polynôme caractéristique est scindé).

21. Montrons que $\mathrm{Ker}(v^p)$ est stable par u : pour tout $x \in \mathrm{Ker}(v^p)$ on a $v^p(u(x)) = (\phi^2 - \mathrm{Id})^p \circ u(x) = u \circ (\phi^2 - \lambda)^p(x) = 0_E$ car u commute avec ϕ^2 donc avec tout polynôme en ϕ^2. Ceci prouve que $u(x) \in \mathrm{Ker}(v^p)$.

Montrons que $\mathrm{Im}(v^p)$ est stable par u : pour tout $y \in \mathrm{Im}(v^p)$, il existe $x \in E$ tel que $y = v^p(x) = (\phi^2 - \mathrm{Id})^p(x)$ donc $u(y) = u \circ (\phi^2 - \mathrm{Id})^p(x) = (\phi^2 - \mathrm{Id})^p \circ u(x) \in \mathrm{Im}(v^p)$.

Par ailleurs, $v^p = (\phi^2 - \lambda \mathrm{Id})^p$ est un polynôme en ϕ donc $\mathrm{Ker}(v^p)$ et $\mathrm{Im}(v^p)$ sont stables par ϕ.

Posons $F = \mathrm{Ker}(v^p)$ et $G = \mathrm{Im}(v^p)$. En notant u_F et ϕ_F les restrictions de u et de ϕ à F on définit deux endomorphismes de F, et l'égalité $-u = \phi \circ u \circ \phi^{-1}$ prise uniquement pour des vecteurs de F donne $-u_F = \phi_F \circ u_F \circ \phi_F^{-1}$. ceci prouve que u_F vérifie la condition **(C3)**.
De même, la restriction u_G de u à G vérifie la condition **(C3)**.
Mais u est indécomposable, donc l'un des deux sous-espaces F ou G est réduit à $\{0_E\}$. Ce ne peut être F car λ est valeur propre de ϕ^2 donc $G = \{0_E\}$ et $E = F = \mathrm{Ker}(\phi^2 - \lambda \mathrm{Id})$, soit $\phi^2 = \lambda \mathrm{Id}$.

22. En notant α une racine carrée de λ dans $\mathbb{C}$, le polynôme $(X - \alpha)(X + \alpha)$ annule ϕ donc $\mathrm{Sp}\,\phi \subset \{-\alpha, \alpha\}$.

23. ϕ possède donc au plus deux valeurs propres, ce qui nous permet d'appliquer la question 15 : $E = E_\alpha^c(\phi) \oplus E_{-\alpha}^c(\phi)$.
Par ailleurs, on a $u \circ \phi = -\phi \circ u$ donc $u \circ (\phi - \alpha \mathrm{Id}) = -(\phi + \alpha \mathrm{Id}) \circ u$. Il est alors facile de prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u \circ (\phi - \alpha \mathrm{Id})^n = (-1)^n (\phi + \alpha \mathrm{Id})^n \circ u$.
Sachant qu'il existe deux entiers p et q tels que $E_\alpha^c(\phi) = \mathrm{Ker}\Big((\phi - \alpha \mathrm{Id})^p\Big)$ et $E_{-\alpha}^c(\phi) = \mathrm{Ker}\Big((\phi + \alpha \mathrm{Id})^q\Big)$, la relation ci-dessus permet d'établir sans peine que pour tout $x \in E_\alpha^c(u)$, $u(x) \in E_{-\alpha}^c(\phi)$ et pour tout $x \in E_{-\alpha}^c(u)$, $u(x) \in E_\alpha^c(\phi)$, ce qui prouve que u est échangeur.

24. Raisonnons par récurrence sur $n = \dim E$, en considérant un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant la condition **(C3)**.

- Si $n = 1$ tout endomorphisme est indécomposable donc la question précédente prouve que u vérifie la condition **(C1)**.
- Si $n \geqslant 2$, supposons le résultat acquis jusqu'au rang $n - 1$.
  Si u est indécomposable, la question 21 prouve que u vérifie la condition **(C1)**. Dans le cas contraire, il existe une décomposition de l'espace $E = F \oplus G$ formée de deux sous-espaces non nuls et stables par u et tels que u_F et u_G vérifient la condition **(C3)**. Par hypothèse de récurrence u_F et u_G vérifient donc **(C1)** : on a $F = F_1 \oplus F_2$ avec $u(F_1) \subset F_2$ et $u(F_2) \subset F_1$, et $G = G_1 \oplus G_2$ avec $u(G_1) \subset G_2$ et $u(G_2) \subset G_1$.
  En posant $H_1 = F_1 \oplus G_1$ et $H_2 = F_2 \oplus G_2$ on a $E = H_1 \oplus H_2$ avec $u(H_1) \subset H_2$ et $u(H_2) \subset H_1$, ce qui prouve que u est échangeur, autrement dit que u vérifie **(C1)**. La récurrence se propage.

Extrait du rapport de l'épreuve

Le sujet, d'un niveau et d'une longueur conformes aux standards du concours, mobilisait les connaissances du programme d'algèbre linéaire de première et seconde année en filière PSI, y compris la réduction des endomorphismes et les polynômes d'endomorphismes. Le sujet contenait une large majorité de questions de difficulté faible à moyenne. Les questions les plus délicates étaient les 14, 15, 18, 21 [1], 23 et 24 : elles ont permis aux meilleurs candidats de s'exprimer et ont mis quasiment tous les autres en échec. En grande majorité, les candidats ont traité les questions 4 à 12.

Trop de copies sont mal rédigées, mal présentées et mal orthographiées. Des sanctions systématiques ont été appliquées aux copies truffées de symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ utilisés à mauvais escient.

Cette année, le jury n'a pas eu à déplorer de contresens particulier sur les objets introduits dans le préambule. Les candidats ne devaient pas jouer sur les mots et faire comme si la notion d'endomorphismes semblables leur était connue : en particulier il n'était pas acceptable d'annoncer sans explication que deux endomorphismes semblables ont la même trace. Beaucoup de candidats ont, en fin de partie D, confondu le sous-espace caractéristique $E^c_\lambda(f)$ avec le sous-espace propre $E_\lambda(f)$.

Trop de candidats confondent ouvertement endomorphismes et matrices carrées, ce qui était d'autant plus problématique ici que l'on raisonnait sur des espaces vectoriels abstraits dénués de toute base canonique. À ce titre, les candidats doivent faire preuve de davantage de précision dans leur rédaction : parler de la matrice associée à un endomorphisme, sans indiquer de base, n'est pas acceptable. La précision dans les raisonnements fait aussi trop souvent défaut dès qu'apparaissent des objets formels : ainsi, en 2, très peu de candidats mentionnent (et justifient !) que δ et $-\delta$ sont différents.

Dans l'ensemble, le jury a pu constater, pour une moitié des copies corrigées, une maîtrise à peu près convenable des outils d'algèbre linéaire de première année (typiquement, la question 9 est partiellement réussie par une bonne proportion de candidats). En revanche, les outils de seconde année ne semblent souvent pas faire partie de l'arsenal des candidats. La stabilisation d'un noyau ou d'une image par commutation n'est un réflexe que chez une infime fraction des candidats (voir les questions 13 et 17, où l'application de ce principe général échappe à presque tous) ; enfin, l'utilisation d'un polynôme annulateur pour discuter un spectre (question 14) est une idée qui ne vient spontanément qu'à une vingtaine de candidats parmi les 5000 ayant passé l'épreuve. Le sujet était conçu pour qu'une utilisation judicieuse des outils de seconde année permette d'avancer rapidement, mais peu sont ceux qui ont su en tirer profit, les autres se rabattant systématiquement sur des techniques rudimentaires et lourdes.

Remarque. La durée des épreuves des Mines est de trois heures.

Détail des questions

Q1. La trace est effectivement invariante par similitude, mais dans le cas des endomorphismes on attendait une explication : en effet, la notion d'endomorphismes semblables est normalement inconnue des étudiants, et il est hors de question d'admettre quelque résultat que ce soit sur elle, plus particulièrement dès la première question du sujet. Les candidats pouvaient utiliser l'identité $\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u)$ mais pas $\forall (u,v,w) \in \mathcal{L}(E)^3$, $\mathrm{tr}(u \circ v \circ w) = \mathrm{tr}(v \circ u \circ w)$ puisque cette dernière est fausse !

Q2. Les candidats pouvaient utiliser la formule $\chi_u = X^2 - (\mathrm{tr}\, u)X + \det u$ pour obtenir l'essentiel des résultats de cette question. Le jury a lu énormément de raisonnements faux : un endomorphisme d'un plan vectoriel n'a pas nécessairement deux valeurs propres distinctes, un polynôme annulateur de degré 2 n'est pas nécessairement le polynôme caractéristique, etc. Le fait que $\delta \neq -\delta$ était crucial pour déterminer la dimension des sous-espaces propres de u : il fallait le mentionner et le justifier. On a vu souvent apparaître l'écriture $\sqrt{\det(u)}$, qui n'avait pas ici de sens.

Q3. Beaucoup de candidats signalent leur incompréhension de la notion de droite propre en proposant comme sous-espaces échangés $E_\delta(u)$ et $E_{-\delta}(u)$. D'autres ont la bonne idée, à savoir considérer $D = \mathrm{Vect}(x+y)$ où x et y sont des vecteurs propres associés respectivement à δ et $-\delta$. Attention de ne pas se limiter à des vecteurs respectifs de $E_\delta(u)$ et $E_{-\delta}(u)$, qui pourraient être nuls. Pour ceux qui trouvent une droite correcte, il est trop rare de lire des démonstrations totalement justifiées des propriétés attendues de D.

Q4. Question facile le plus souvent réussie : revenir aux coefficients n'était pas une bonne idée pour justifier la réponse, le calcul par blocs était plus judicieux.

Q5. Pour l'inversibilité de D et le calcul de D^{-1}, tout argument incorrect était sanctionné. Le calcul de D^2 suffisait à conclure. L'usage d'une comatrice (hors programme !) pour calculer D^{-1} n'était pas judicieux. On attendait plusieurs étapes de calcul pour DMD^{-1}.

1. Dans le sujet originel, les questions 20, 21 et 22 n'en faisaient qu'une et n'étaient pas autant détaillées.

Q6. On attendait une justification minimale. À ce titre, non seulement $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{G}$ n'implique pas $u(\mathrm{F}) \not\subset \mathrm{F}$ (que penser du vecteur nul ?), mais ce dernier fait ne donnait pas aux candidats les informations qu'ils prétendaient tirer sur la forme de la matrice.

Q7. On attendait non seulement une référence aux questions 5 et 6, mais aussi une rédaction impeccable sur le retour aux endomorphismes. Le cas où l'un des espaces est nul est rarement bien traité : dans celui-ci les données introduites à la question 6 étaient caduques ; il est vrai que u est alors nul, mais on ne peut se contenter de l'affirmer. Signalons que, géométriquement, on pouvait prendre pour a (respectivement, pour b) l'endomorphisme nul sur G (respectivement, sur F) et dont la restriction à F (respectivement, à G) coïncide avec u ; on pouvait aussi prendre pour ϕ la symétrie par rapport à F et parallèlement à G.

Q8. Question classique souvent bien traitée.

Q9. Il y avait de nombreuses façons de procéder et on pouvait même raisonner sans la moindre référence à la dimension finie. Notons que les égalités $\mathrm{Ker}\, a = \mathrm{Im}\, a$ et $\mathrm{Ker}\, b = \mathrm{Im}\, b$ ne servaient pas réellement dans la suite (seule l'inclusion facile était utilisée), mais leur démonstration a permis de mettre en valeur les candidats ayant de la suite dans les idées.

Q10. Question souvent bien réussie. Attention, pour un sous-espace vectoriel F de E, l'égalité $(a+b)(\mathrm{F}) = a(\mathrm{F}) + b(\mathrm{F})$ ne tient pas en général.

Q11. À quoi bon raisonner par récurrence ? Le passage de $v^k(x) = 0_\mathrm{E}$ à $vi + 1^{k+1}(x) = 0_\mathrm{E}$ devait être justifié. Plusieurs candidats confondent $(f - \lambda \mathrm{Id})^2$ et $f^2 - \lambda^2 \mathrm{Id}$.

Q12. Le fait que la suite des dimensions $\left(\dim \mathrm{Ker}(v^k)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est stationnaire est rarement bien justifié. Il est vrai que toute suite d'entiers croissante et majorée est stationnaire, mais on voit mal dans quel paragraphe du programme ce résultat est censé figurer.

Q13. Cette question fait souvent la distinction entre les bonnes copies et les autres. Le théorème du rang ne suffit pas à justifier l'égalité $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}(v^p) \oplus \mathrm{Im}(v^p)$. Partir d'un élément de $\mathrm{Ker}(v^p)$ et l'écrire comme un élément de $\mathrm{Ker}(v^{2p})$ n'était pas de nature à faire progresser vers une solution. Pour les stabilités exigées en fin de question, le recours à une commutation aurait été judicieux (le fait qu'un polynôme en f commute nécessairement avec f pouvait être considéré comme un résultat de cours).

Q14. La première partie de la question est parfois bien réussie. On aurait aimé avoir des explications sur l'inclusion $\mathrm{Ker}\, v \subset \mathrm{Ker}(v^p)$, car elle ne pouvait pas directement se déduire de la question 11 dans le cas $p = 0$. La deuxième partie de la question est rarement bien traitée. Une fois démontré que λ est la seule valeur propre possible de la restriction de f à $\mathrm{E}^c_\lambda(f)$, on pouvait conclure rapidement en notant que cet endomorphisme a au moins une valeur propre puisque $\mathrm{E}^c_\lambda(f)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Ici, trop peu de candidats pensent à utiliser un polynôme annulateur de cette restriction.

Q15. Cette question difficile a été très peu réussie.

Q16. Ici a et b n'avaient aucune raison de commuter, et il fallait donc développer u^2 en $a^2 + a \circ b + b \circ a + b^2$. Il était judicieux de commencer par simplifier l'expression de u^2 avant de calculer $u^2 \circ a$ et $a \circ u^2$.

Q17. - C'est souvent bien compris, mais un appel à un théorème du cours aurait permis de proposer des solutions plus efficaces que celles que le jury a le plus souvent vues.

Q18. Cette question n'est traitée qu'épisodiquement. Très peu de candidats identifient correctement u_F comme un endomorphisme nilpotent et u_G comme un automorphisme. La difficulté était ensuite de voir comment, à partir du caractère échangeur de ces endomorphismes, obtenir celui de u.

Q19. Question souvent traitée et assez péniblement rédigée. Les calculs sont rarement présentés de manière intelligible.

Q20-21-22. Ces questions n'ont qu'épisodiquement été traitées correctement, les quelques tentatives de grappillage ont souvent été vaines. Traiter la question 22 ne rapportait rien si la précédente n'était pas réussie.

Terminons par quelques conseils pour les futurs candidats.

- Maîtriser parfaitement son cours.
- Bien réfléchir, aidé d'un brouillon, à la structure du raisonnement ou du calcul avant de le coucher sur le papier. Au moment de la rédaction, donner toutes les justifications pertinentes (et rien qu'elles !), et structurer correctement ses raisonnements.
- Il est toujours préférable d'analyser un nombre réduit de questions en profondeur plutôt que de traiter superficiellement la totalité du sujet. On pouvait ici avoir une note tout à fait satisfaisante en se contentant de traiter correctement les deux tiers des questions.