

VARIABLES ALÉATOIRES ENTIÈRES SYMÉTRIQUES À FORTE DISPERSION (MINES PC 2021)

Durée : 4 heures (initialement 3 heures)

Dans tout le sujet, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires considérées sont définies. On utilisera systématiquement la locution « variable aléatoire » pour parler d'une variable aléatoire réelle discrète, et « variable aléatoire entière » pour parler d'une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{Z} . On pourra noter

$$X(\Omega) = \{x_n, n \in I\}$$

où I est un sous-ensemble fini ou dénombrable de \mathbb{N} et $x_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in I$.

DÉFINITION. (Dispersion d'ordre α) — On fixe un réel $\alpha > 0$. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On dit que X vérifie la condition (D_α) – dite de dispersion d'ordre α – lorsque, quand n tend vers $+\infty$,

$$\mathbb{P}(|X| \geq n) = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (1)$$

DÉFINITION. (Variables aléatoires symétriques) — On dit que X est symétrique lorsque $-X$ suit la même loi que X , autrement dit lorsque

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X = -x). \quad (2)$$

On admet le principe de transfert de l'égalité en loi :

THÉORÈME — Étant donné deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans un même ensemble E , ainsi qu'une application $u : E \rightarrow F$, si X et Y suivent la même loi alors $u(X)$ et $u(Y)$ aussi.

Dans tout le sujet, on se donne une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires entières, mutuellement indépendantes, toutes de même loi, symétriques, et vérifiant la condition (D_α) . On admet que sous ces conditions la variable X_{n+1} est indépendante de $X_1 + \dots + X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

appelée n^{e} moyenne empirique des variables X_k . L'objectif du sujet est d'établir la convergence simple d'une suite de fonctions associées aux variables M_n .

Les trois premières parties du sujet sont totalement indépendantes les unes des autres.

Questions de cours

1 ▷ Soit X une variable aléatoire. Rappeler la définition de « X est d'espérance finie ». Montrer alors que X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ est d'espérance finie.

2 ▷ Soit X une variable aléatoire. Montrer que si X est bornée, autrement dit s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que $\mathbb{P}(|X| \leq M) = 1$, alors X est d'espérance finie.

Généralités sur les variables aléatoires

3 ▷ Soit X une variable aléatoire entière vérifiant (D_α) . Montrer que X n'est pas d'espérance finie, et que X^2 non plus.

4 ▷ Soit X une variable aléatoire symétrique, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction impaire. Montrer que $f(X)$ est symétrique, et que si $f(X)$ est d'espérance finie alors $\mathbb{E}(f(X)) = 0$.

5 ▷ Soient X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. En comparant la loi de $(-X, -Y)$ à celle de (X, Y) , démontrer que $X + Y$ est symétrique.

Deux sommes de séries

On fixe ici un nombre complexe z tel que $z \neq 1$ et $|z| \leq 1$. On introduit la fonction

$$L : t \mapsto \int_0^t \frac{z}{1-uz} du.$$

6 ▷ Montrer que, sur le segment $[0, 1]$, la fonction L est convenablement définie et de classe \mathcal{C}^∞ . Donner une expression simple de sa dérivée n^e pour tout $n \geq 1$.

7 ▷ Justifier que pour tout $t \in]0, 1]$, on a $1-t \leq |1-tz|$, et plus précisément encore que $1-t < |1-tz|$.

8 ▷ En déduire successivement que

$$\int_0^1 \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

9 ▷ En déduire, grâce à une formule de Taylor, que $L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.

10 ▷ Montrer que la fonction

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, u) & \mapsto |1 + u e^{it}| \end{cases}$$

est continue. En déduire qu'il existe, pour tout $a \in]0, \pi[$, un réel $m_a > 0$ tel que

$$\forall (t, u) \in [-a, a] \times [0, 1], \quad |1 + u e^{it}| \geq m_a.$$

11 ▷ Montrer que la fonction

$$F : t \in]-\pi, \pi[\mapsto \int_0^1 \frac{e^{it}}{1 + u e^{it}} du$$

est de classe \mathcal{C}^1 et donner une expression de sa dérivée sous la forme d'une intégrale à paramètre.

12 ▷ Montrer que

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \quad F'(t) = -\frac{\tan(t/2)}{2} + \frac{i}{2}$$

et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t \in]-\pi, \pi[$.

13 ▷ Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Déduire des questions précédentes que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

On fixe dans cette partie une variable aléatoire symétrique X . On pose

$$\Phi_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \mathbb{E}(\cos(tX)) \end{cases}$$

appelée *fonction caractéristique* de X .

14 ▷ Montrer que Φ_X est bien définie, paire et que $\forall t \in \mathbb{R}, |\Phi_X(t)| \leq 1$.

15 ▷ En utilisant le théorème du transfert, montrer que Φ_X est continue.

Dans la suite de cette partie, on suppose que X est une variable aléatoire entière symétrique vérifiant la condition (D_α) . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$R_n = \mathbb{P}(|X| \geq n).$$

16 ▷ On fixe un réel $t \in]0, 2\pi[$. Montrer successivement que

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1}) \cos(nt)$$

puis

$$\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n (\cos(nt) - \cos((n-1)t)).$$

On pourra établir au préalable la convergence de la série $\sum R_n \cos(nt)$.

17 ▷ Montrer qu'il existe un nombre réel C tel que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n} \right) e^{int} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} C$$

et en déduire que, quand t tend vers 0^+ ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = O(\ln(t)) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\pi\alpha}{2} + o(1).$$

18 ▷ Conclure que, quand t tend vers 0^+ ,

$$\Phi_X(t) = 1 - \frac{\pi\alpha}{2}t + o(t).$$

La fonction Φ_X est-elle dérivable en 0?

Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables M_n

19 ▷ Soient X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t).$$

20 ▷ Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, la variable M_n est symétrique, et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) = \Phi_{X_1}(t/n)^n.$$

21 ▷ En déduire que pour tout réel t ,

$$\Phi_{M_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right).$$

22 ▷ La convergence établie à la question précédente est-elle uniforme sur \mathbb{R} ?

À partir de là, des théorèmes d'analyse de Fourier permettraient de démontrer que la suite $(M_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable de Cauchy de paramètre $\frac{\pi\alpha}{2}$, ce qui signifie que pour tout segment $[a, b]$ de \mathbb{R} ,

$$\mathbb{P}(a \leq M_n \leq b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{2} \int_a^b \frac{du}{u^2 + (\pi\alpha/2)^2}.$$