Contrôle de mathématiques

Durée : 4 heures

Ce contrôle est constitué de deux problèmes indépendants.

Irrationnalité de certains réels (d'après EPITA 2021)

Le but de ce problème est de prouver l'irrationnalité des réels de la forme $\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ pour $n > 2$ (on rappelle qu'un nombre réel est dit *rationnel* s'il appartient à $\mathbb{Q}$, et qu'il est dit *irrationnel* sinon). La première partie de ce problème traite du cas particulier où $n = 4$; le cas général est traité dans la seconde partie.

On rappelle que pour tout couple d'entiers $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, la fraction $\frac{p}{q}$ est dite *irréductible* si les entiers p et q sont premiers entre eux, autrement dit lorsque $\operatorname{pgcd}(p, q) = 1$.

Partie I. Irrationnalité de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Question 1.

a) Exprimer les valeurs de $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right)$ en fonction de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

b) Exprimer de même les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$ en fonction de $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$.

Question 2.

a) Déterminer les racines complexes de l'équation $z^5 + 1 = 0$.

b) Donner leur somme, et en déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}$.

Question 3.

a) Simplifier la quantité $2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$, et en déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ sont les racines du polynôme $4X^2 - 2X - 1$.

b) En déduire une expression de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ à l'aide du réel $\sqrt{5}$.

Question 4. Prouver que $\sqrt{5}$ est irrationnel, et en déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est aussi irrationnel.

Partie II. Irrationnalité de $\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ pour $n > 2$

On considère la suite de polynômes à coefficients réels (U_n) définie par les relations :

$$U_0 = 1, \qquad U_1 = 2X \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 2, \quad U_n = 2XU_{n-1} - U_{n-2}$$

Question 5.

a) Calculer les polynômes U_2, U_3 et U_4.

b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer que U_n est de degré n, et préciser son coefficient dominant.

c) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, déterminer la valeur de $U_n(0)$.

d) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, montrer que U_n est pair lorsque n est pair, et impair lorsque n est impair.

Question 6.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout réel θ non multiple de π, démontrer la relation suivante :

$$\mathrm{U}_n(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

b) Préciser les valeurs de $\mathrm{U}_n(1)$ et de $\mathrm{U}_n(-1)$ en fonction de n.

c) En déduire que le polynôme U_n admet n racines distinctes qu'on précisera, et en déduire l'expression factorisée de U_n.

On convient d'introduire la suite de polynômes (V_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{V}_n(\mathrm{X}) = \mathrm{U}_n\left(\frac{\mathrm{X}}{2}\right)$.

Question 7.

a) Calculer les polynômes V_n pour $0 \leqslant n \leqslant 4$.

b) Donner le degré et le coefficient dominant de V_n.

c) Exprimer pour tout $n \geqslant 2$ le polynôme V_n en fonction de V_{n-1} et V_{n-2} et en déduire que les coefficients de V_n dans la base canonique appartiennent à $\mathbb{Z}$.

d) En déduire que le coefficient de X^k dans U_n est un entier relatif multiple de 2^k.

Question 8.

a) On considère une fraction irréductible $\frac{p}{q}$ (avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) racine du polynôme V_n. En exploitant l'égalité $q^n \mathrm{V}_n\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, démontrer que $q = 1$, et en déduire qu'une racine rationnelle de V_n appartient nécessairement à $\mathbb{Z}$.

b) En déduire que les seules racines rationnelles possibles de U_n appartiennent à $\left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$.

Question 9. Déduire des résultats précédents que $\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ est irrationnel pour $n > 2$.

Question 10.

a) En exploitant la relation obtenue à la question 6a, montrer que la fonction polynomiale $x \mapsto \mathrm{U}_n(x)$ est solution sur l'intervalle $]-1, 1[$ de l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0$$

b) En déduire que le polynôme U_n vérifie la relation : $(1 - \mathrm{X}^2)\mathrm{U}_n'' - 3\mathrm{X}\mathrm{U}_n' + n(n+2)\mathrm{U}_n = 0$.

Question 11. On convient de poser $\mathrm{U}_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \mathrm{X}^k$.

a) Exprimer λ_{k+2} en fonction de λ_k et montrer que l'on a pour tout entier j tel que $0 \leqslant 2j \leqslant n$: $\lambda_{n-2j} = \frac{(-1)^j}{2^{2j}} \binom{n-j}{j} \lambda_n$.

b) En déduire l'expression de U_n dans la base canonique.

Polynômes réels à racines toutes réelles (extrait de Mines PC 2021)

Notations

- Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ on notera $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ le coefficient binomial.
- On note $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$.
- On dit que a est un zéro d'ordre m de $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ si

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

- On note $\mathrm{D} : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ l'opérateur de dérivation, i.e. $\mathrm{D}(f) = f'$.

Partie I. Log-concavité des suites

Soit $(a_0, \ldots, a_n)$ une suite à valeurs réelles. On dira qu'elle est :

- *unimodulaire* s'il existe $j \in [\![0,n]\!]$ tel que $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_j$ et $a_j \geqslant a_{j+1} \geqslant \cdots \geqslant a_n$;
- *log-concave* si pour tout $j \in [\![1,n-1]\!]$ on a $a_j^2 \geqslant a_{j-1}a_{j+1}$;
- *ultra log-concave* si la suite $\left(\dfrac{a_k}{\binom{n}{k}}\right)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est log-concave.

Question 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ on pose $b_k = \binom{n}{k}$. Montrer que la suite $(b_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est log-concave.

Question 2. Montrer que si la suite $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est ultra log-concave, alors elle est log-concave.

Question 3. Montrer que si la suite $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est strictement positive et log-concave, alors elle est unimodulaire.

Partie II. Polynômes réels à racines toutes réelles

Soit $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = a_0 + a_1\mathrm{X} + \cdots + a_n\mathrm{X}^n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ avec $a_n \neq 0$ un polynôme réel de degré $n \geqslant 1$. Il est dit *à racines toutes réelles* si toutes ses racines complexes sont en fait réelles. Par convention, le polynôme nul sera lui aussi considéré à racines toutes réelles.

On suppose dans cette partie que le polynôme P est à racines toutes réelles.

Question 4. Montrer que P' est à racines toutes réelles.
Indication : on pourra utiliser le théorème de Rolle en veillant aux multiplicités des racines.

Question 5. Montrer que $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n\mathrm{P}(1/\mathrm{X})$ est un polynôme à racines toutes réelles.
Indication : on commencera par préciser le degré de $\mathrm{Q}(\mathrm{X})$.

Question 6. Pour $k \in [\![1,n-1]\!]$ on considère $\mathrm{Q}_1(\mathrm{X}) = \mathrm{P}^{(k-1)}(\mathrm{X})$ puis $\mathrm{Q}_2(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{n-k+1}\mathrm{Q}_1\left(\dfrac{1}{\mathrm{X}}\right)$ et enfin $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \mathrm{Q}_2^{(n-k-1)}(\mathrm{X})$. Montrer que $\mathrm{Q}(\mathrm{X})$ est un polynôme de degré au plus 2 à racines toutes réelles et en déduire que $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est ultra log-concave.

Question 7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{D}(e^{-\alpha x}\mathrm{P}(x))$ est une fonction polynomiale à racines toutes réelles.
Indication : on pourra à nouveau utiliser le théorème de Rolle en considérant en outre le comportement en $\pm\infty$.

Question 8. Soit $\mathrm{Q} = \displaystyle\sum_{j=0}^{m} b_j\mathrm{X}^j$ un autre polynôme à racines toutes réelles. Montrer que $\mathrm{R} = \displaystyle\sum_{j=0}^{m} b_j\mathrm{P}^{(j)}(\mathrm{X})$ est un polynôme à racines toutes réelles.
Indication : on pourra raisonner par récurrence sur m.