Corrigé : contrôle de mathématiques

Irrationnalité de certains réels (d'après EPITA 2021)

Partie I. Irrationnalité de $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$

Question 1.

a) $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)=\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{5}\right)=-\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$

$\cos\left(\dfrac{6\pi}{5}\right)=\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{5}\right)=-\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$

$\cos\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)=\cos\left(2\pi-\dfrac{\pi}{5}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$

b) $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)=\cos\left(\pi-\dfrac{3\pi}{5}\right)=-\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$

$\cos\left(\dfrac{7\pi}{5}\right)=\cos\left(2\pi-\dfrac{3\pi}{5}\right)=\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$

$\cos\left(\dfrac{8\pi}{5}\right)=\cos\left(\pi+\dfrac{3\pi}{5}\right)=-\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$

Question 2.

a) $z^5=-1 \iff (-z)^5=1 \iff -z=\exp\left(\dfrac{2ik\pi}{5}\right)$ avec $k\in[\![0,4]\!]$ $\iff z=\exp\left(i\pi+\dfrac{2ik\pi}{5}\right)$ avec $k\in[\![0,4]\!]$.

Les racines complexes du polynôme X^5+1 sont donc : $e^{i\pi}=-1$, $\exp\left(\dfrac{7i\pi}{5}\right)$, $\exp\left(\dfrac{9i\pi}{5}\right)$, $\exp\left(\dfrac{i\pi}{5}\right)$, et $\exp\left(\dfrac{3i\pi}{5}\right)$.

b) Le coefficient de X^4 dans le polynôme X^5+1 est nul donc la somme de ces racines est égale à 0. On a donc :

$$\exp\left(\frac{i\pi}{5}\right)+\exp\left(\frac{3i\pi}{5}\right)+\exp\left(\frac{7i\pi}{5}\right)+\exp\left(\frac{9i\pi}{5}\right)=1.$$

En passant aux parties réelles on obtient : $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)+\cos\left(\dfrac{7\pi}{5}\right)+\cos\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)=1$ soit, compte tenu de la première question : $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Question 3.

a) On a $2\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)=\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}+\dfrac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}-\dfrac{\pi}{5}\right)=-\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)-\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$ d'après la première question, donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)=-\dfrac{1}{4}$. On en déduit que $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)$ sont les racines du polynôme $X^2-\dfrac{1}{2}X-\dfrac{1}{4}$, soit encore de $4X^2-2X-1$.

b) Mais par ailleurs on sait que les racines de ce polynôme du second degré sont $\dfrac{1\pm\sqrt5}{4}$. Sachant que $0<\dfrac{\pi}{5}<\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{3\pi}{5}<\pi$ on a $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)>0$ et $\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)<0$, ce qui permet d'identifier : $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)=\dfrac{1+\sqrt5}{4}$ et $\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)=\dfrac{1-\sqrt5}{4}$.

Question 4. Supposons $\sqrt5$ rationnel, et écrivons-le alors sous la forme d'une fraction irréductible : $\sqrt5=\dfrac{p}{q}$. On a $p^2=5q^2$ donc p est divisible par 5 : posons $p=5p'$. Mais alors $5p'^2=q^2$ donc q est divisible par 5. Ainsi, p et q ne sont pas premiers entre eux (ils sont tous deux divisibles par 5), ce qui est contradictoire avec notre hypothèse de départ. On en déduit que $\sqrt5$ est irrationnel.

Supposons alors $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ rationnel, et écrivons-le sous la forme d'une fraction irréductible : $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)=\dfrac{p}{q}$. D'après l'expression trouvée en 3b on en déduit que $\sqrt5=\dfrac{4p-q}{q}$, soit $\sqrt5\in\mathbb{Q}$, ce qui n'est pas. Ainsi, $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ est irrationnel.

Partie II. Irrationnalité de $\cos\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ pour $n > 2$

Question 5.

a) On calcule :

$$U_2 = 4X^2 - 1, \qquad U_3 = 8X^3 - 4X, \qquad U_4 = 16X^4 - 12X^2 + 1.$$

b) Montrons par récurrence que $\deg U_n = n$ et que $\text{cdom}(U_n) = 2^n$:

- c'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$;
- si $n \geqslant 2$, supposons le résultat acquis aux rangs $n-1$ et $n-2$. Alors $\deg 2XU_{n-1} = n$ et $\deg U_{n-2} = n-2 < n$ donc $\deg U_n = n$ et $\text{cdom}(U_n) = 2\,\text{cdom}(U_{n-1}) = 2^n$ donc la récurrence se propage.

c) Posons $u_n = U_n(0)$. La suite (u_n) vérifie les relations : $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = -u_{n-2}$ donc il est facile d'établir par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{2p} = (-1)^p$ et $u_{2p+1} = 0$.

d) Montrons par récurrence sur n que $U_n(-X) = (-1)^n U_n(X)$.

- C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$;
- si $n \geqslant 2$, supposons le résultat vrai aux rangs $n-1$ et $n-2$. Alors :

$$U_n(-X) = -2XU_{n-1}(-X) - U_{n-2}(-X) = -2X(-1)^{n-1}U_{n-1}(X) - (-1)^{n-2}U_{n-2}(X) = (-1)^n\Big(2XU_{n-1}(X) - U_{n-2}(X)\Big) = (-1)^n U_n(X)$$

  donc la récurrence se propage.

Il en résulte immédiatement que U_n est pair pour n pair et impair pour n impair.

Question 6.

a) Montrons par récurrence sur n que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin\theta U_n(\cos\theta) = \sin(n+1)\theta$:

- c'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$;
- si $n \geqslant 2$, supposons le résultat acquis aux rangs $n-1$ et $n-2$. Alors :

$$\sin\theta U_n(\cos\theta) = 2\cos\theta\sin\theta U_{n-1}(\cos\theta) - \sin\theta U_{n-2}(\cos\theta) = 2\cos\theta\sin(n\theta) - \sin(n-1)\theta$$

  Or $2\cos\theta\sin(n\theta) = \sin(n\theta + \theta) + \sin(n\theta - \theta)$ donc $\sin\theta U_n(\cos\theta) = \sin(n+1)\theta$; la récurrence se propage.

b) Lorsque θ tend vers 0 on a $\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \underset{0}{\sim} \dfrac{(n+1)\theta}{\theta} = n+1$. Une fonction polynomiale étant continue, en faisant tendre θ vers 0 dans la relation $U_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ on obtient $U_n(1) = n+1$.

Enfin, le polynôme U_n ayant même parité que n on en déduit que $U_n(-1) = (-1)^n U_n(1) = (-1)^n(n+1)$.

c) Posons $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n+1}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. D'après la question 6a, $U_n(\cos\theta_k) = 0$. par ailleurs, ces n valeurs sont distinctes dans l'intervalle $]0, \pi[$ donc les $\cos\theta_k$ constituent n racines distinctes de U_n. Sachant que $\deg U_n = n$ et $\text{cdom}(U_n) = 2^n$ on en déduit que $U_n = 2^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - \cos\theta_k)$.

Question 7.

a) D'après la question 5a on a :

$$V_0 = 1, \qquad V_1 = X, \qquad V_2 = X^2 - 1, \qquad V_3 = X^3 - 2X, \qquad V_4 = X^4 - 3X^2 + 1.$$

b) On a $\deg V_n = \deg U_n = n$ donc $\text{cdom}(V_n) = \dfrac{1}{2^n}\text{cdom}(U_n) = 1$.

c) Pour tout $n \geqslant 2$, $U_n\left(\dfrac{X}{2}\right) = XU_{n-1}\left(\dfrac{X}{2}\right) - U_{n-2}\left(\dfrac{X}{2}\right)$ donc $V_n(X) = XV_{n-1}(X) - V_{n-2}(X)$.

Montrons maintenant par récurrence sur n que V_n est à coefficients entiers :

- c'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$;
- si $n \geqslant 2$, supposons le résultat acquis aux rangs $n-1$ et $n-2$. Alors XV_{n-1} et V_{n-2} sont à coefficients entiers donc il en est de même de V_n ; la récurrence se propage.

d) Le coefficient de X^k dans U_n est égal à $2^k\mu_k$ où μ_k est le coefficient de X^k dans V_n. Sachant que μ_k est un entier relatif on en déduit que le coefficient de X^k dans U_n est un entier divisible par 2^k.

Question 8.

a) On a $q^n V_n\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=0}^{n} \mu_k p^k q^{n-k} = p^n + q\left(\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k p^k q^{n-1-k}\right)$. Ainsi, si $V_n\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ alors $p^n = -q\left(\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k p^k q^{n-1-k}\right)$. Le terme entre parenthèses est un entier, donc cette égalité montre que q divise p. S'agissant d'entiers premiers entre eux on en déduit que $q = 1$.

Ainsi, si V_n possède une racine rationnelle, celle-ci ne peut qu'être un entier relatif.

b) Si r est une racine rationnelle de U_n alors $2r$ est une racine rationnelle de V_n donc d'après la question précédente, il existe un entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $r = \frac{p}{2}$. Mais on a observé à la question 6c que les racines réelles de U_n sont toutes dans l'intervalle $]-1, 1[$. Ainsi, les seules racines rationnelles que peut éventuellement posséder U_n sont $-\frac{1}{2}$, 0 et $\frac{1}{2}$.

Question 9. On sait d'après 6c que $\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ est racine de U_n. De plus, pour $n > 2$ on a $0 < \frac{\pi}{n+1} < \frac{\pi}{3}$ et la fonction cosinus étant strictement décroissante sur $[0, \pi]$ on en déduit que $\frac{1}{2} < \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) < 1$. Compte tenu de la question 8b on en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ est irrationnel pour $n > 2$.

Question 10.

a) Dérivons deux fois par rapport à θ la relation : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\sin\theta U_n(\cos\theta) = \sin(n+1)\theta$. On obtient successivement :

$$\cos\theta U_n(\cos\theta) - \sin^2\theta U_n'(\cos\theta) = (n+1)\cos(n+1)\theta$$
$$-\sin\theta U_n(\cos\theta) - 3\sin\theta\cos\theta U_n'(\cos\theta) + \sin^3\theta U_n''(\cos\theta) = -(n+1)^2\sin(n+1)\theta$$

Dans cette dernière relation on remplace $\sin(n+1)\theta$ par $\sin\theta U_n(\cos\theta)$ pour obtenir :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \sin\theta\Big((1-\cos^2\theta)U_n''(\cos\theta) - 3\cos\theta U_n'(\cos\theta) + \big((n+1)^2 - 1\big)U_n(\cos\theta)\Big) = 0$$

On en déduit que pour tout $\theta \in]0, \pi[$, $(1-\cos^2\theta)U_n''(\cos\theta) - 3\cos\theta U_n'(\cos\theta) + n(n+2)U_n(\cos\theta) = 0$, soit encore que pour tout $x \in]-1, 1[$, $(1-x^2)U_n''(x) - 3xU_n'(x) + n(n+2)U_n(x) = 0$.

b) Ceci montre que le polynôme $(1-X^2)U_n'' - 3XU_n' + n(n+2)U_n$ s'annule sur l'intervalle $]-1, 1[$. Il a donc une infinité de racines, c'est le polynôme nul.

Question 11.

a) On a
$$\begin{aligned}(1-X^2)U_n'' - 3XU_n' + n(n+2)U_n &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\lambda_k X^{k-2} - \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\lambda_k X^k - 3\sum_{k=1}^{n} k\lambda_k X^k + n(n+2)\sum_{k=0}^{n}\lambda_k X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-2}(k+2)(k+1)\lambda_{k+2}X^k - \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\lambda_k X^k - 3\sum_{k=0}^{n} k\lambda_k X^k + n(n+2)\sum_{k=0}^{n}\lambda_k X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-2}\Big((k+2)(k+1)\lambda_{k+2} + \big(n(n+2) - k(k+2)\big)\lambda_k\Big)X^k + (2n+1)\lambda_{n-1}X^{n-1}\end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition dans la base canonique on en déduit que $\lambda_{n-1} = 0$ et que pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, $\lambda_{k+2} = -\frac{(n-k)(n+k+2)}{(k+1)(k+2)}\lambda_k$.

Montrons alors par récurrence sur j que pour tout $j \in [\![0, \lfloor n/2 \rfloor]\!]$, $\lambda_{n-2j} = \frac{(-1)^j}{4^j}\binom{n-j}{j}\lambda_n$.

- C'est évident pour $j = 0$;
- si $0 < j$, supposons le résultat acquis au rang $j-1$. Alors :

$$\begin{aligned}\lambda_{n-2j} &= -\frac{(n-2j+1)(n-2j+2)}{(2j)(2n-2j+2)}\lambda_{n-2j+2} = -\frac{(n-2j+1)(n-2j+2)}{4j(n-j+1)}\frac{(-1)^{j-1}}{4^{j-1}}\binom{n-j+1}{j-1}\lambda_n \\ &= \frac{(-1)^j}{4^j}\frac{(n-2j+1)(n-2j+2)}{j(n-j+1)}\frac{(n-j+1)!}{(j-1)!(n-2j+2)!}\lambda_n = \frac{(-1)^j}{4^j}\frac{(n-j)!}{j!(n-2j)!}\lambda_n = \frac{(-1)^j}{4^j}\binom{n-j}{j}\lambda_n.\end{aligned}$$

La récurrence se propage.

b) Nous savons d'après la question 5 que $\lambda_n = 2^n$ et que U_n a même parité que n, ce qui impose $\lambda_{n-2j-1} = 0$ pour $1 \leqslant 2j+1 \leqslant n$. Ainsi, $U_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \lambda_{n-2j} X^{n-2j}$, soit : $U_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^j 2^{n-2j} \binom{n-j}{j} X^{n-2j}$.

Polynômes réels à racines toutes réelles (extrait de Mines PC 2021)

Partie I. Log-concavité des suites

Question 1. Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$. On calcule $\dfrac{b_j^2}{b_{j-1}b_{j+1}} = \dfrac{j+1}{j} \times \dfrac{n-j+1}{n-j} \geqslant 1$ donc la suite (b_k) est log-concave.

Question 2. Soit (a_k) une suite ultra log-concave, et $b_k = \dfrac{a_k}{\binom{n}{k}}$; on a $a_k = b_k \dbinom{n}{k}$.

Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$. Les suites (b_k) et $\dbinom{n}{k}$ sont log-concaves donc $b_{j-1}b_{j+1} \leqslant b_j^2$ et $\dbinom{n}{j-1}\dbinom{n}{j+1} \leqslant \dbinom{n}{j}^2$.
S'agissant de quantités positives on peut multiplier les inégalités pour obtenir $a_{j-1}a_{j+1} \leqslant a_j^2$, ce qui montre que (a_k) est log-concave.

Question 3. Soit (a_k) une suite strictement positive et log-concave. Pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, $\dfrac{a_{j+1}}{a_j} \leqslant \dfrac{a_j}{a_{j-1}}$ donc la suite $\dfrac{a_{j+1}}{a_j}$ est décroissante. Considérons alors trois cas :

- si $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} \geqslant 1$ alors $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_{n-1} \leqslant a_n$;
- si $\dfrac{a_1}{a_0} \leqslant 1$ alors $a_0 \geqslant a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_{n-1} \geqslant a_n$;
- dans les autres cas, il existe $j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $\dfrac{a_j}{a_{j-1}} \geqslant 1 \geqslant \dfrac{a_{j+1}}{a_j}$ et alors $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_j \geqslant a_{j+1} \geqslant \cdots \geqslant a_n$.

Dans les trois cas, la suite (a_k) est unimodulaire.

Partie II. Polynômes réels à racines toutes réelles

Question 4. Posons $P = a_n \displaystyle\prod_{j=1}^{k} (X - \lambda_j)^{n_j}$ avec $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} n_j = n$.
D'après le théorème de Rolle, il existe pour tout $j \in [\![1, k-1]\!]$ une racine de P' dans l'intervalle $]\lambda_j, \lambda_{j+1}[$. De plus, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont racines de P' de multiplicité respectives $n_1 - 1, \dots, n_k - 1$ (par convention une racine d'ordre 0 n'est pas racine).

Ceci donne en tout au moins $(k-1) + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} (n_j - 1) = (k-1) + (n-k) = n-1 = \deg P'$ racines pour P' (comptées avec leurs multiplicités) donc P' est bien à racines toutes réelles.

Question 5. $Q(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + +a_{n-1}X + a_n$ donc Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, et plus précisément de degré $n - n_0$ où n_0 est la multiplicité de 0 en tant que racine de P. En effet, X^{n_0} divise P et pas X^{n_0+1} donc $P = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} a_k X^k$ avec $a_{n_0} \neq 0$.
Posons $P = a_n X^{n_0} \displaystyle\prod_{j=1}^{k} (X - \lambda_j)^{n_j}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont des réels non nuls. Alors $Q = a_n \displaystyle\prod_{j=1}^{k} (1 - \lambda_j X)^{n_j}$ donc $\dfrac{1}{\lambda_1}, \dots, \dfrac{1}{\lambda_k}$ sont racines de Q avec pour multiplicités respectives $n_1, \dots, n_k$. On a $n_1 + \cdots + n_k = n - n_0 = \deg Q$ donc Q est à racines toutes réelles.

Question 6. $\deg Q_1 = n-k+1$, $\deg Q_2 \leqslant n-k+1$ (voir question précédente) donc $\deg Q \leqslant 2$.
La question 4 permet de montrer par récurrence que Q_1 est à racines toutes réelles ; la question 5 qu'il en est de même de Q_2, et de nouveau la question 4 que Q est à racines toutes réelles.
On calcule successivement $Q_1 = \sum_{j=k-1}^{n} a_j \frac{j!}{(j-k+1)!} X^{j-k+1}$, $Q_2 = \sum_{j=k-1}^{n} a_j \frac{j!}{(j-k+1)!} X^{n-j}$ et enfin

$$Q = \sum_{j=k-1}^{k+1} a_j \frac{j!}{(j-k+1)!} \frac{(n-j)!}{(k+1-j)!} X^{k+1-j} = a_{k+1} \frac{(k+1)!(n-k-1)!}{2} + a_k k!(n-k)! X + a_{k-1} \frac{(k-1)!(n-k+1)!}{2} X^2$$

Ce dernier polynôme est à racines toutes réelles donc a un discriminant positif ou nul, soit :

$$a_k^2 \Big(k!(n-k)!\Big)^2 - a_{k-1} a_{k+1} (k+1)!(n-k-1)!(k-1)!(n-k+1)! \geqslant 0,$$

ce qui s'écrit encore en divisant par $(n!)^2$: $\left(\frac{a_k}{\binom{n}{k}}\right)^2 - \frac{a_{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \frac{a_{k+1}}{\binom{n}{k+1}} \geqslant 0$. La suite (a_k) est bien ultra log-concave.

Question 7. Si $\alpha = 0$ la question 4 répond à la question.
Si $\alpha \neq 0$ on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{\alpha x} D(e^{-\alpha x} P(x)) = P'(x) - \alpha P(x)$. Il s'agit bien d'une fonction polynomiale de degré n.
Avec les notations de la question 4, les réels $a_1, \dots, a_k$ sont racines au moins d'ordre $n_1 - 1, \dots, n_k - 1$ de $P' - \alpha P$. En outre la fonction $x \mapsto e^{-\alpha x} P(x)$ s'annule en $a_1, \dots, a_k$ et admet (par croissances comparées) une limite nulle en $+\infty$ (si $\alpha > 0$) ou en $-\infty$ (si $\alpha < 0$). Le théorème de Rolle nous donne pour sa dérivée $k-1$ racines $b_j \in]a_j, a_{j+1}[$ $(1 \leqslant j \leqslant k-1)$ et une généralisation de ce même théorème une racine de plus $b_0 \in]-\infty, a_1[$ (si $\alpha < 0$) ou $b_k \in]a_k, +\infty[$ (si $\alpha > 0$).

Tout ceci donne (en comptant les racines avec leurs multiplicités respectives) au moins $(k-1) + 1 + \sum_{j=1}^{k} (n_j - 1) = n$ racines, donc le polynôme $P' - \alpha P$ est bien à racines toutes réelles.

Question 8. Posons $Q = b_m \prod_{j=1}^{m} (X - \alpha_i)$ et raisonnons par récurrence sur m.

- Si $m = 1$ alors $R = b_m(P' - \alpha_1 P)$ et la question précédente a montré que R est à racines toutes réelles.
- Si $m > 1$, supposons le résultat acquis au rang $m-1$. Posons $Q_1 = b_m \prod_{j=1}^{m-1} (X - \alpha_j) = \sum_{j=0}^{m-1} b'_j X^j$. Par hypothèse de récurrence, le polynôme $R_1 = \sum_{j=0}^{m-1} b'_j P^{(j)}$ est à racines toutes réelles. Mais $R = R'_1 - \alpha_m R_1$ donc d'après la question 7 le polynôme R est lui aussi à racines toutes réelles, et la récurrence se propage.