Fonctions quasi-analytiques (Centrale PC 2011 - extrait)

Durée : 4 heures

On note $\mathcal{W}$ l'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ nulles en dehors d'un segment (qui dépend de la fonction considérée dans $\mathcal{W}$).

I Un élément de $\mathcal{W}$

On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle, et telle que la série $\sum a_n$ converge.

I. A – Une fonction affine par morceaux

On pose pour tout x réel, $f_0(x) = \dfrac{1}{2a_0^2}\Big(|x+a_0| + |x-a_0| - 2|x|\Big)$.

I. A. 1) Montrer que f_0 est nulle en dehors de $[-a_0, a_0]$, préciser sa valeur sur $[-a_0, 0]$ et $[0, a_0]$, justifier rapidement sa continuité et tracer rapidement son graphe.

I. A. 2) On pose $k = \dfrac{1}{a_0^2}$.

a) Pour tout réel x montrer que $|f_0(x)| \leqslant \dfrac{1}{a_0}$.

b) Montrer que f_0 est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$.

I. B – La première étape

On pose pour tout x réel, $f_1(x) = \dfrac{1}{2a_1}\displaystyle\int_{x-a_1}^{x+a_1} f_0(t)\,\mathrm{d}t$.

I. B. 1) Montrer que f_1 est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f_1'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

I. B. 2) Montrer que f_1 est nulle en dehors de $[-a_0 - a_1, a_0 + a_1]$.

I. B. 3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_1(x)| \leqslant \dfrac{1}{a_0}$ et $|f_1'(x)| \leqslant \dfrac{1}{a_0 a_1}$.

I. B. 4) Montrer que f_1 est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$.

I. C – Une suite de fonctions

On définit par récurrence une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions par f_0 et f_1 définies comme dans les questions précédentes et, pour tout naturel $n \geqslant 2$ et tout x réel,

$$f_n(x) = \frac{1}{2a_n}\int_{x-a_n}^{x+a_n} f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

I. C. 1) Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f_n'(x)$ pour tout x réel.

I. C. 2) Montrer que f_n est nulle en dehors de $\left[-\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i, \sum_{i=0}^{n} a_i\right]$.

I. C. 3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\left|f_n(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{a_0}$ et que, si $p \leqslant n$, on a $\left|f_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{a_0 a_1 \cdots a_p}$.

I. C. 4) Montrer que f_n est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$.

I. C. 5) Montrer que pour tout naturel n

$$\int_{-S}^{S} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1 \quad \text{où } S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Note *: on admettra que si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, alors* $\displaystyle\int_a^b \left(\int_c^d h(x+y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b h(x+y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$

I. D – La limite

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} k_n$ où $k_n = f_n - f_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

I. D. 1)

a) Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel x, montrer que $\left|k_n(x)\right| \leqslant \frac{k}{2} a_n$.

b) En déduire la convergence normale de la série de fonctions $\sum k_n$.

Pour tout réel x, on note $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(x)$.

I. D. 2)

a) Montrer que pour tout x réel, $f_n(x)$ converge vers une limite que l'on notera $w(x)$ et qui vérifie $w(x) = f_0(x) + s(x)$.

b) Pour tout réel x réel, montrer que $\left|w(x)\right| \leqslant \frac{1}{a_0}$.

c) Montrer que w est lipschitzienne de rapport k sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que w est nulle en dehors du segment $[-\mathrm{S}, \mathrm{S}]$.

I. D. 3)

a) Montrer que $\int_{-\mathrm{S}}^{\mathrm{S}} w(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

b) En déduire que w n'est pas constante nulle sur $\mathbb{R}$.

I. D. 4)

a) Montrer que $\sum_{n\geqslant 2} \left(f_n' - f_{n-1}'\right)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

b) Trouver un lien entre w, f_1 et $\sum_{n=2}^{\infty} \left(f_n - f_{n-1}\right)$.

c) En déduire que w est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que pour tout x réel, $\left|w'(x)\right| \leqslant \frac{1}{a_0 a_1}$.

I. D. 5) Soit $p \geqslant 2$.

a) Montrer que $\sum_{n\geqslant p+1} \left(f_n^{(p)} - f_{n-1}^{(p)}\right)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

b) Trouver un lien entre w, f_p et $\sum_{n=p+1}^{\infty} \left(f_n - f_{n-1}\right)$.

c) En déduire que w est de classe $\mathscr{C}^p$ sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que pour tout x réel, $\left|w^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{1}{a_0 a_1 \cdots a_p}$.

II Classes quasi-analytiques

On considère une suite réelle $\mathrm{M} = (\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les trois conditions :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{M}_n > 0 \tag{1}$$

$$\mathrm{M}_0 = 1 \tag{2}$$

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{M}_n^2 \leqslant \mathrm{M}_{n-1}\mathrm{M}_{n+1} \tag{3}$$

On note $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ pour lesquelles il existe deux constantes $\mathrm{A} > 0$ et $\mathrm{B} > 0$ (dépendantes de f) telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \mathrm{AB}^n\mathrm{M}_n$$

L'ensemble $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ est dit *classe associée* à la suite M.
La classe $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ est dite *quasi-analytique* si

$$\forall f \in \mathcal{C}(\mathrm{M}) \quad \left(\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = 0\right) \implies f = 0$$

II. A – Quelques propriétés d'une classe

II. A. 1) Montrer que si $f \in \mathcal{C}(\mathrm{M})$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors la fonction $g : x \mapsto f(ax+b)$ appartient aussi à $\mathcal{C}(\mathrm{M})$.

II. A. 2) Vérifier que $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

II. A. 3)

a) Montrer que pour tous $n,k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant n$, on a $\mathrm{M}_k\mathrm{M}_{n-k} \leqslant \mathrm{M}_n$. On pourra étudier, pour p fixé, la monotonie de la suite $\left(\mathrm{M}_n/\mathrm{M}_{n-p}\right)_{n\geqslant p}$.

b) En déduire que le produit de deux éléments quelconques de $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ est un élément de $\mathcal{C}(\mathrm{M})$.

II. B – Un exemple de classe quasi-analytique

On note U la suite définie par $\mathrm{U}_n = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II. B. 1) Montrer que la suite U vérifie les conditions (1), (2) et (3).

II. B. 2) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathrm{U})$; on fixe $\mathrm{A} > 0, \mathrm{B} > 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \mathrm{A}\mathrm{B}^n n!$$

a) Dans cette question et la suivante, on suppose que le réel a vérifie $\forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(a) = 0$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, |x-a| \leqslant \dfrac{1}{2\mathrm{B}} \implies f(x) = 0$.

c) Montrer que $\mathcal{C}(\mathrm{U})$ est une classe quasi-analytique.

II. C –

II. C. 1) Montrer que si $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ est quasi-analytique, alors $\mathcal{C}(\mathrm{M}) \cap \mathcal{W} = \{0\}$.

II. D – On se donne une suite réelle $\mathrm{M} = (\mathrm{M}_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant les trois conditions (1), (2) et (3) et on considère les assertions :

- (i) la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{\mathrm{M}_n}\right)^{1/n}$ converge ;
- (ii) la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mathrm{M}_{n-1}}{\mathrm{M}_n}$ converge ;
- (iii) la classe $\mathcal{C}(\mathrm{M})$ n'est pas quasi-analytique.

Pour tout $n \geqslant 1$, on note $\alpha_n = \dfrac{\mathrm{M}_{n-1}}{\mathrm{M}_n}$.

II. D. 1) Exprimer M_n en fonction de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et en déduire que $(i) \implies (ii)$.

II. D. 2) Démontrer en utilisant la partie I que $(ii) \implies (iii)$.

Remarque. On peut montrer à l'aide d'outils mathématiques plus élaborés que $(iii) \implies (i)$, ce qui donne une caractérisation des classes quasi-analytiques. Ce résultat constitue une partie du théorème de Denjoy-Carleman.