Corrigé : étude d'un opérateur intégral (Centrale PSI 2022)

I Préliminaires : étude de quelques éléments de E

I. A – Des fonctions de E utiles pour la suite

Q 1. Soit $\alpha > 0$. $p_\alpha(t)^2 \dfrac{e^{-t}}{t} = t^{2\alpha-1} e^{-t} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-2\alpha}}$ avec $1-2\alpha < 1$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 p_\alpha(t)^2 \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ converge.

Par ailleurs, $p_\alpha(t)^2 \dfrac{e^{-t}}{t} \underset{+\infty}{=} O(e^{-t/2})$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} p_\alpha(t)^2 \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ converge. p_α étant continue on en déduit que $p_\alpha \in E$.

Q 2. Quelle que soit la fonction polynomiale P, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} P(t)^2 \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ converge car $P(t)^2 \dfrac{e^{-t}}{t} \underset{+\infty}{=} O(e^{-t/2})$.

Puisque P n'est pas le polynôme nul, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(t) \underset{0}{\sim} \lambda t^n$ et alors $P(t)^2 \dfrac{e^{-t}}{t} \underset{0}{\sim} \dfrac{\lambda}{t^{1-n}}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 P(t)^2 \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ converge si et seulement si $n > 0$ soit $n \in \mathbb{N}^*$ s'agissant d'un entier.

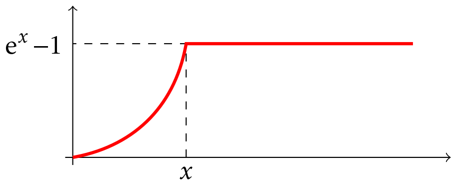
Puisque $P(0) = \begin{cases} \lambda & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$ on en déduit que $P \in E$ si et seulement si $P(0) = 0$.

Q 3. Notons $f : t \mapsto a e^t + b$. Si $a \neq 0$ on a $f(t)^2 \dfrac{e^{-t}}{t} \underset{+\infty}{\sim} a^2 \dfrac{e^t}{t}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)^2 \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ diverge.

Si $b \neq 0$ on a $f(t)^2 \dfrac{e^{-t}}{t} \underset{0}{\sim} \dfrac{b^2}{t}$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)^2 \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ diverge.
On en déduit que $f \in E$ si et seulement si $a = b = 0$.

Q 4. Notons $f : t \mapsto (e^t - 1)^2 \dfrac{e^{-t}}{t}$. On a $f(t) \underset{0}{\sim} t$ donc f estprolongeable par continuité en 0 et donc intégrable sur tout intervalle $]0, x]$ avec $x > 0$.

Q 5. Pour $x > 0$ fixé le graphe de la fonction k_x sur $]0, +\infty[$ est de la forme suivante :



D'après la question 4, la fonction $t \mapsto k_x(t)^2 \dfrac{e^{-t}}{t}$ est intégrable sur $]0, x]$; au voisinage de $+\infty$ on a $k_x(t)^2 \dfrac{e^{-t}}{t} \underset{+\infty}{=} O\left(\dfrac{e^{-t}}{t}\right) \underset{+\infty}{=} O(e^{-t/2})$ donc la fonction $t \mapsto k_x(t)^2 \dfrac{e^{-t}}{t}$ est intégrable sur $[x, +\infty[$. On en déduit que $k_x \in E$.

I. B – Une condition suffisante d'appartenance à E

Q 6. Notons que la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{t/2}}{\sqrt{t}}$ est continue et intégrable sur $]0, x]$ puisque $\dfrac{e^{t/2}}{\sqrt{t}} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.
D'après le théorème fondamental de l'analyse Φ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\Phi'(x) = \frac{2\,e^{x/2}}{\sqrt{x}(1+x)} + \frac{2\sqrt{x}\,e^{x/2}}{1+x} - \frac{4\sqrt{x}\,e^{x/2}}{(1+x)^2} - \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}} = (\text{calcul}) = \frac{(1-x)^2\,e^{x/2}}{\sqrt{x}(1+x)^2} \geqslant 0$$

La fonction Φ est donc croissante sur $]0, +\infty[$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to 0} \Phi(x) = 0$ donc pour tout $x \geqslant 0$, $\Phi(x) \geqslant 0$.

Q 7. Pour tout $\epsilon > 0$, $f(x) - f(\epsilon) = \displaystyle\int_\epsilon^x f'(t)\,dt$ donc $|f(x) - f(\epsilon)| \leqslant \displaystyle\int_\epsilon^x |f'(t)|\,dt \leqslant C \int_\epsilon^x \frac{e^{t/2}}{\sqrt{t}}\,dt$. Puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t/2}}{\sqrt{t}}$ est intégrable au voisinage de 0 on peut faire tendre ϵ vers 0 pour obtenir $|f(x)| \leqslant C \displaystyle\int_0^x \frac{e^{t/2}}{\sqrt{t}}\,dt = C\left(\frac{4\sqrt{x}\,e^{x/2}}{1+x} - \Phi(x)\right)$ et puisque $\Phi(x) \geqslant 0$ on obtient en définitive $|f(x)| \leqslant C \dfrac{4\sqrt{x}\,e^{x/2}}{1+x}$.

Q 8. De ceci il résulte que pour tout $x>0$, $0 \leqslant f(x)^2\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} \leqslant \dfrac{16\mathrm{C}^2}{(1+x)^2}$, et puisque la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ on en déduit que $f \in \mathrm{E}$.

II Structure préhilbertienne de E

Q 9. En développant l'inégalité $(a-b)^2 \geqslant 0$ on obtient $ab \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$ donc pour tout $t>0$, $|f(t)g(t)| \leqslant \dfrac{f(t)^2+g(t)^2}{2}$ et ainsi, $|f(t)g(t)|\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(f(t)^2\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}+g(t)^2\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\right)$. Puisque f et g appartiennent à E, ceci montre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

Q 10. La fonction nulle est élément de E et pour tout $f,g \in \mathrm{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $t>0$,

$$\big(\lambda f(t)+g(t)\big)^2\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} = \lambda^2 f(t)^2\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} + 2\lambda f(t)g(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} + g(t)^2\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$$

Puisque f et g appartiennent à E, les fonctions $t \mapsto f(t)^2\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$, $t \mapsto g(t)^2\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ et la fonction $t \mapsto f(t)g(t)\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ (d'après la question 9) sont intégrable sur $]0,+\infty[$, ce qui prouve que $\lambda f+g \in \mathrm{E}$. E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$.

Q 11. Symétrie et bilinéarité sont ici des propriétés évidentes.
Pour tout $f \in \mathrm{E}$, $\langle f \mid f\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ (intégrale d'une fonction positive), et puisque $t \mapsto f(t)^2\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est positive et continue, $\langle f \mid f\rangle = 0 \implies \forall t>0,\ f(t)^2\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t} = 0$, soit encore $f(t)=0$.
Il s'agit donc bien d'un produit scalaire.

Q 12. On a
$$\begin{aligned}\|k_x\|^2 &= \int_0^x (\mathrm{e}^t-1)^2\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + (\mathrm{e}^x-1)^2\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^x (\mathrm{e}^t-1)^2\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + (\mathrm{e}^x-1)^2\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{(\mathrm{e}^t-1)^2}{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x-1)^2}{x}\end{aligned}$$
La fonction $t \mapsto \dfrac{(\mathrm{e}^t-1)^2}{t}\,\mathrm{e}^{-t}$ est prolongeable par continuité en 0 donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^x \frac{(\mathrm{e}^t-1)^2}{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 0$.
$\dfrac{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x-1)^2}{x} \underset{0}{\sim} x$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x-1)^2}{x} = 0$. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\|k_x\| = 0$.

Q 13. Une intégration par parties donne pour tout $k \geqslant 1$, $\displaystyle\int_0^x t^k\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -x^k\,\mathrm{e}^{-x} + k\int_0^x t^{k-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
Puisque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^k\,\mathrm{e}^{-x} = 0$ on en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{k-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature, et qu'en cas de convergence, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = k\int_0^{+\infty} t^{k-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
Sachant que l'intégrale de référence $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $k!$.

Q 14. Soient $0<m<n$ deux entiers naturels. On a $\langle p_m \mid p_n\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{m+n-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = (m+n-1)!$ donc la famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas orthogonale.

III Un opérateur sur E

III. A –

Q 15. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\big|\mathrm{U}(f)(x)\big| = \big|\langle k_x \mid f\rangle\big| \leqslant \|k_x\|\cdot\|f\|$ donc d'après la question 12, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\mathrm{U}(f)(x) = 0$.

Q 16. $\mathrm{U}(f)(x) = \displaystyle\int_0^x (\mathrm{e}^t-1)f(x)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty}(\mathrm{e}^x-t)f(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x (1-\mathrm{e}^{-t})\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t + (\mathrm{e}^x-1)\int_x^{+\infty} f(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Q 17. Les fonctions $t \mapsto (1-\mathrm{e}^{-t})\dfrac{f(t)}{t}$ et $t \mapsto f(t)\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ sont continues donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, $\mathrm{U}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, et :

$$\mathrm{U}(f)'(x) = (1-\mathrm{e}^{-x})\frac{f(x)}{x} + \mathrm{e}^x\int_x^{+\infty} f(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - (\mathrm{e}^x - 1)f(x)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = \mathrm{e}^x\int_x^{+\infty} f(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

Q 18. La fonction $t \mapsto f(t)\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, $\mathrm{U}(f)'$ est de classe $\mathscr{C}^1$ (autrement dit, $\mathrm{U}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^2$), et

$$\mathrm{U}(f)''(x) = \mathrm{e}^x\int_x^{+\infty} f(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \mathrm{e}^x f(x)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = \mathrm{U}(f)'(x) - \frac{f(x)}{x}$$

la fonction $\mathrm{U}(f)$ est donc bien solution de l'équation différentielle $y''-y' = -\dfrac{f(x)}{x}$.

Q 19. Pour tout $x>0$, $\left|\mathrm{U}(f)'(x)\right| \leqslant \mathrm{e}^x\displaystyle\int_x^{+\infty}\left|f(t)\right|\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\int_x^{+\infty}\left|f(t)\right|\frac{\mathrm{e}^{-t/2}}{\sqrt{t}}\times\frac{\mathrm{e}^{-t/2}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\mathrm{U}(f)'(x)\right| \leqslant \mathrm{e}^x\left(\int_x^{+\infty} f(t)^2\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \times \int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant \mathrm{e}^x\left(\int_0^{+\infty} f(t)^2\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \times \int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} = \mathrm{e}^x\|f\|\left(\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

Par ailleurs, $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{x}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$ donc en définitive, $\left|\mathrm{U}(f)'(x)\right| \leqslant \mathrm{e}^x\|f\|\dfrac{\mathrm{e}^{-x/2}}{\sqrt{x}} = \|f\|\dfrac{\mathrm{e}^{x/2}}{\sqrt{x}}$.

Q 20. Les questions 15 et 19 montrent que les hypothèses de la partie I.B sont vérifiées ; la question 8 permet d'en déduire que $\mathrm{U}(f) \in \mathrm{E}$. La linéarité de U étant évidente, on en déduit que U est un endomorphisme de E.
Enfin, la question 7 prouve que pour tout $x>0$, $\left|\mathrm{U}(f)(x)\right| \leqslant 4\|f\|\dfrac{\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{x/2}}{1+x}$.

Q 21. $\|\mathrm{U}(f)\|^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{U}(f)(t)^2\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant 16\|f\|^2\int_0^{+\infty}\frac{t\,\mathrm{e}^t}{(1+t)^2}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = 16\|f\|^2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 16\|f\|^2\left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^{+\infty} = 16\|f\|^2$ donc $\|\mathrm{U}(f)\| \leqslant 4\|f\|$.

Q 22. Si $\mathrm{U}(f)=0$ alors $\mathrm{U}(f)'=0$ et $\mathrm{U}(f'')=0$ et d'après la question 18, $f=0$ donc U est injectif.

Q 23. Si U était surjectif, pour tout $\alpha>0$ la fonction p_α posséderait un antécédent $f_\alpha \in \mathrm{E}$: $\mathrm{U}(f_\alpha) = p_\alpha$.
D'après la question 20 on aurait : pour tout $x>0$, $x^\alpha \leqslant 4\|f_\alpha\|\dfrac{\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{x/2}}{1+x} \iff 1 \leqslant 4\|f_\alpha\|\dfrac{x^{1/2-\alpha}\,\mathrm{e}^{x/2}}{1+x}$.
En choisissant $0 \leqslant \alpha < 1/2$ on a $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^{1/2-\alpha}\,\mathrm{e}^{x/2}}{1+x} = 0$, ce qui conduit à une absurdité. U n'est donc pas surjectif.

III. B –

Q 24. $\mathrm{U}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ donc F est de classe $\mathscr{C}^1$, et d'après la question 18,

$$\forall x>0,\quad \mathrm{F}'(x) = \big(\mathrm{U}(f)'(x) - \mathrm{U}(f)''(x)\big)\mathrm{e}^{-x} = f(x)\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

Q 25. Soit $x>0$. D'après la question 19, $|\mathrm{F}(x)| \leqslant \|f\|\dfrac{\mathrm{e}^{-x/2}}{\sqrt{x}}$ et d'après la question 20, $\left|\mathrm{U}(g)(x)\right| \leqslant 4\|g\|\dfrac{\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{x/2}}{1+x}$ donc $\left|\mathrm{F}(x)\mathrm{U}(g)(x)\right| \leqslant \dfrac{4\|f\|\,\|g\|}{1+x}$.

Q 26. D'après la question 19, $\left|\mathrm{F}(x)\right| \leqslant \|f\|\left(\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$. On écrit ensuite, pour tout $x \in]0,1]$:

$$\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^1\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_x^1\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-1} - \ln x$$

donc $\left|\mathrm{F}(x)\right| \leqslant \|f\|\big(\mathrm{e}^{-1} - \ln x\big)^{1/2}$.

Q 27. D'après la question 25, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x)\mathrm{U}(g)(x) = 0$.
D'après la question 20, $\mathrm{U}(g)(x) \underset{0}{=} \mathrm{O}\big(\sqrt{x}\big)$ et d'après la question 26, $\mathrm{F}(x) \underset{0}{=} \mathrm{O}\big(\sqrt{-\ln x}\big)$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{F}(x)\mathrm{U}(g)(x) = 0$.

Q 28. $\langle f \mid \mathrm{U}(g)\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{U}(g)(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$. On va réaliser l'intégration par parties représentée par le schéma :

$$\begin{array}{c|cc|} + & \mathrm{U}(g)(t) & f(t)\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \\ - & \mathrm{U}(g)'(t) & \mathrm{F}(t) \end{array}$$

Cette intégration par parties est licite car d'après la question précédente, $\lim\limits_{t\to 0} \mathrm{F}(t)\mathrm{U}(g)(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{F}(t)\mathrm{U}(g)(t) = 0$. Elle conduit à : $\langle f \mid \mathrm{U}(g)\rangle = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{U}(g)'(t)\mathrm{F}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{U}(f)'(t)\mathrm{U}(g)'(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Q 29. Cette expression est symétrique vis-à-vis des variables f et g donc en inversant le rôle de ces dernières on obtient $\langle f \mid \mathrm{U}(g)\rangle = \langle g \mid \mathrm{U}(f)\rangle = \langle \mathrm{U}(f) \mid g\rangle$.

IV Solutions d'une équation différentielle développables en série entière

Q 30. Puisque le rayon de convergence est infini, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

On en déduit que f est solution de (E_p) si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + p\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \iff \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + p\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\iff pa_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(n(n+1)a_{n+1} + (p-n)a_n\Big)x^n = 0$$

Par unicité du développement en série entière on en déduit que f est solution de (E_p) si et seulement si $a_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $n(n+1)a_{n+1} = (n-p)a_n$.

IV.A – Recherche de solutions polynomiales

Q 31. Une solution polynomiale est une solution développable en série entière telle que la suite (a_n) soit nulle à partir d'un certain rang. Compte tenue de la relation de récurrence obtenue, il existe des solutions polynomiales non identiquement nulles si et seulement s'il existe un entier $\mathrm{N} \geqslant 1$ tel que $a_\mathrm{N} \neq 0$ et $a_{\mathrm{N}+1} = 0$, soit encore si et seulement si $p = \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. Il s'agit alors de fonctions polynomiales de degré $\mathrm{N} = p$ s'annulant en 0, qui appartiennent à E d'après la question 2.

Q 32. On calcule $h'(x) = \mathrm{e}^{-x}\big(\mathrm{P}'(x) - \mathrm{P}(x)\big)$ et $h''(x) = \mathrm{e}^{-x}\big(\mathrm{P}''(x) - 2\mathrm{P}'(x) + \mathrm{P}(x)\big)$ donc :

$$x\Big(h''(x) + h'(x)\Big) + ph(x) = \mathrm{e}^{-x}\Big(x\Big(\mathrm{P}''(x) - \mathrm{P}'(x)\Big) + p\mathrm{P}(x)\Big) = 0$$

car P est solution de (E_p). h est bien solution de l'équation différentielle $x(y'' + y') + py = 0$.

Q 33. Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ et P sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$ donc par produit de Cauchy leur produit h aussi.

Q 34. Prouvons la formule demandée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

- si $n = 1$ la formule est une évidence ;
- si $n \geqslant 1$, supposons la formule acquise au rang n. Alors

$$b_{n+1} = -\frac{(n+p)}{n(n+1)}b_n = -\frac{(n+p)}{n(n+1)} \times \frac{(-1)^{n-1}(n+p-1)!}{p!n!(n-1)!}b_1 = \frac{(-1)^n(n+p)!}{p!n!(n+1)!}b_1$$

  donc la récurrence se propage.

Q 35. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ donc g_p aussi, avec : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+p-1}}{n!}$.

On en déduit que $g_p^{(p)}$ est elle aussi développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et que son développement s'obtient en dérivant p fois terme à terme : $g_p^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!n!} x^{n-1}$.

On constate alors que $b_1 x g_p^{(p)}(x) = p!h(x) = p!\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{P}(x)$ donc $\mathrm{P}(x) = \mathrm{C}x\mathrm{e}^x\, g_p^{(p)}(x)$ avec $\mathrm{C} = \frac{b_1}{p!}$.

IV. B – Solutions développables en séries entières non polynomiales

Q 36. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$ on définit une unique suite (a_n) en posant $a_0 = 0$, $a_1 = \lambda$ et pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = \frac{n-p}{n(n+1)} a_n$. Cette suite est non nulle à partir du rang 1 car $p \notin \mathbb{N}^*$.

On a $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ donc d'après le critère de d'Alembert la série entière $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$, et d'après la question 30, f est solution sur $\mathbb{R}$ de (E_p).

Q 37. Pour tout $n \geqslant p$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n-p}{n(n+1)}$ et pour tout $n \geqslant 2p$, $\frac{n-p}{n} \geqslant \frac{1}{2}$ donc en posant $q = \lfloor 2p \rfloor + 1$ on a : $\forall n \geqslant q$, $|a_{n+1}| \leqslant \frac{|a_n|}{2(n+1)}$.

Q 38. Prouvons la minoration demandée par récurrence sur $n \geqslant q$:

- si $n = q$ le résultat est évident ;
- si $n \geqslant q$, supposons le résultat acquis au rang n ; alors $|a_{n+1}| \geqslant \frac{1}{2(n+1)} \times \frac{q!|a_q|}{2^{n-q}n!} = \frac{q!|a_q|}{2^{n+1-q}(n+1)!}$ donc la récurrence se propage.

Q 39. La série entière $\sum \frac{x^n}{2^n n!}$ a un rayon de convergence infini (sa somme vaut $\mathrm{e}^{x/2}$) donc pour tout $x > 0$,

$$\psi(x) \geqslant q!|a_q| \sum_{n=q}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n-q}n!} = 2^q q!|a_q| \Big(\mathrm{e}^{x/2} - \mathrm{Q}(x)\Big) \qquad \text{où} \quad \mathrm{Q}(x) = \sum_{n=0}^{q-1} \frac{x^n}{2^n n!}$$

Puisque $a_q \neq 0$ on a $\mathrm{e}^{x/2} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\big(\psi(x)\big)$ et donc $\frac{1}{x} \underset{+\infty}{=} \mathrm{O}\Big(\psi(x)^2 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\Big)$.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge donc il en est de même de $\int_1^{+\infty} \psi(t)^2 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$; la fonction ψ n'appartient pas à E.

Q 40. La relation de récurrence vérifiée par la suite (a_n) montre que cette dernière est de signe constant pour $n > p$ et donc a fortiori à partir de rang q. Il existe donc $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $f(x) = \mathrm{R}(x) + \varepsilon\psi(x)$, où $\mathrm{R}(x) = \sum_{n=1}^{q-1} a_n x^n$. E étant un espace vectoriel, on a $\mathrm{R} \in \mathrm{E}$ (question 2) et $\psi \notin \mathrm{E}$ donc $f \notin \mathrm{E}$.

V Éléments propres de U

Q 41. D'après la question 22, U est injectif donc 0 n'est pas valeur propre de U.

Q 42. Si $\mathrm{U}(f) = \lambda f$ alors $\mathrm{U}(f)' = \lambda f'$ et $\mathrm{U}(f)'' = \lambda f''$ et d'après la question 18, pour tout $x > 0$, $\lambda\Big(f''(x) - f'(x)\Big) = -\frac{f(x)}{x}$ soit encore $x\Big(f''(x) - f'(x)\Big) + \frac{1}{\lambda} f(x) = 0$: f est solution de $(\mathrm{E}_{1/\lambda})$.

Q 43. Si $\frac{1}{\lambda} \notin \mathbb{N}^*$ la question 40 a montré que les solutions développables en série entière de $(\mathrm{E}_{1/\lambda})$ ne pouvaient appartenir à E. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = 1/p$.

Q 44. Posons $y = p\mathrm{U}(\mathrm{P}) - \mathrm{P}$. On a $y' = p\mathrm{U}(\mathrm{P})' - \mathrm{P}'$ et $y'' = p\mathrm{U}(\mathrm{P})'' - \mathrm{P}''$ donc $y'' - y' = p\Big(\mathrm{U}(\mathrm{P})'' - \mathrm{U}(\mathrm{P})'\Big) - (\mathrm{P}'' - \mathrm{P}')$.

D'après la question 18 on a pour tout $x > 0$, $\mathrm{U}(\mathrm{P})''(x) - \mathrm{U}(\mathrm{P})'(x) = -\frac{\mathrm{P}(x)}{x}$ et puisque P est solution de (E_p), $x\Big(\mathrm{P}''(x) - \mathrm{P}'(x)\Big) + p\mathrm{P}(x) = 0$ donc $y'' - y' = 0$.

Q 45. Il existe donc a et b dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$, $y(x) = a\,\mathrm{e}^x + b$. Mais $y = p\mathrm{U}(\mathrm{P}) - \mathrm{P}$ appartient à E car $\mathrm{P} \in \mathrm{E}$ donc d'après la question 3, $a = b = 0$, soit $\mathrm{U}(\mathrm{P}) = \frac{1}{p}\mathrm{P}$. Ceci montre que P est vecteur propre de U pour la valeur propre $1/p$.

Q 46. Soient p et q dans $\mathbb{N}^*$. D'après la question 35 et ce qui précède on a $\mathrm{U}(\mathrm{P}_p) = \frac{1}{p}\mathrm{P}_p$ et $\mathrm{U}(\mathrm{P}_q) = \frac{1}{q}\mathrm{P}_q$.
Alors $\langle \mathrm{P}_p \mid \mathrm{P}_q \rangle = p\langle \mathrm{U}(\mathrm{P}_p) \mid \mathrm{P}_q \rangle$ et de même $\langle \mathrm{P}_p \mid \mathrm{P}_q \rangle = q\langle \mathrm{P}_p \mid \mathrm{U}(\mathrm{P}_q) \rangle$.
Mais d'après la question 29, $\langle \mathrm{U}(\mathrm{P}_p) \mid \mathrm{P}_q \rangle = \langle \mathrm{P}_p \mid \mathrm{U}(\mathrm{P}_q) \rangle$ donc $(q-p)\langle \mathrm{P}_p \mid \mathrm{P}_q \rangle = 0$, et pour $p \neq q$ on a donc $\langle \mathrm{P}_p \mid \mathrm{P}_q \rangle = 0$: la famille $(\mathrm{P}_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est orthogonale.

♦ ♦
♦

Rapport de l'épreuve

Présentation du sujet

Le sujet proposé porte sur un opérateur intégral défini sur un espace de fonctions de carré intégrable avec un poids strictement positif. La première partie permet d'établir des conditions d'appartenance à l'espace vectoriel considéré, elle met essentiellement en oeuvre le chapitre d'intégration sur un intervalle quelconque, et les outils nécessaires : continuité, dérivation, comportement asymptotiques...

La seconde partie est purement préparatoire et permet d'établir la structure d'espace préhilbertien ; les notions de base d'algèbre linéaire et bilinéaire sont évaluées : sous-espace vectoriel, produit scalaire, orthogonalité, norme.

La troisième partie est le coeur du problème avec la définition et l'étude de l'opérateur intégral. Cette partie met en jeu à nouveau l'intégration sur un intervalle quelconque, la primitive de fonction intégrable, intégration par parties.

La quatrième partie porte sur la recherche de solutions développables en séries entières. Elle met en œuvre le chapitre éponyme de seconde année ainsi que le chapitre sur les séries numériques (de première et seconde année).

La cinquième et dernière partie traite de la recherche d'éléments propres de l'opérateur et de certaines de leurs propriétés. On y démontre des propriétés du cours de seconde année mais dans un cadre plus général (orthogonalité des espaces propres d'un endomorphisme symétrique en dimension quelconque).

Analyse globale des résultats

Le sujet proposé aux candidats pour cette session se présentait sous une forme suffisamment longue avec une difficulté raisonnable. Les meilleurs candidats ont ainsi été en mesure de traiter presque toutes les questions avec rigueur et une rédaction claire. Toutes les questions du sujet ont été traitées au moins en partie par plusieurs candidats. L'indépendance de plusieurs parties et la présence de questions très classiques, ont permis aux candidats d'avancer dans le sujet ce qu'à pu noter le jury avec la présence importantes de copies fournies.

Du point de vue du fond, comme le rapport le détaille plus bas, certaines méthodes de base sont parfois défaillantes. Notamment, le raisonnement par disjonctions de cas pose problème à une large partie des candidats, car souvent non hexaustif ou trop embrouillé, voire sans réelle conclusion.

Concernant la forme, une quantité non-négligeable de copies ne respecte pas les standards de présentations qui peuvent être attendu pour de futurs ingénieurs : écriture claire, lisible, propos structuré, mise en avant des résultats ; mais aussi des standards relatifs à un concours scientifique : répondre effectivement à la question posée, penser à conclure, citer les résultats ou les questions précédentes utilisés, vérifier les hypothèses de validité. Ces copies sont donc pénalisées comme prévu dans la notice de l'épreuve. Le jury encourage vivement les candidats à utiliser un brouillon et à ne pas commencer systématiquement la rédaction sitôt l'énoncé entre les mains.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Les parties I à IV ont été abordées par presque tous les candidats.

Partie I

Q 1 Il s'agissait d'un problème d'appartenance d'un élément à un ensemble. Il convient donc de vérifier l'ensemble des conditions. Cette question a été révélatrice du niveau de maitrise de la notion d'intégrale généralisée. L'intégrabilité au voisinage de l'infini a été bien traitée. En revanche son étude au voisinage du l'origine a posé problème : pour certains, avoir une limite finie en une borne de l'intervalle est une condition nécessaire d'intégrabilité ; d'autres éprouvent le besoin de faire une disjonction de cas pour la convergence de $\int_0^1 t^{2\alpha-1}\,\mathrm{d}t$ en traitant le cas $2\alpha-1 \geqslant 0$ puis le cas $2\alpha-1 \in]-1,0[$. La positivité est souvent oubliée pour les candidats utilisant la notion d'intégrale convergente. La continuité de p_α est souvent oubliée.

Q 2-3 Questions très discriminantes. Peu de candidats savent mener à bien un raisonnement par disjonction de cas. Certains pensent que la négation de $a = b = 0$ est $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Pour la notion d'intégrabilité, un grand nombre pense qu'une somme est intégrable si et seulement si chaque terme l'est.

Q 4 L' étude locale au voisinage de l'origine d'une fonction élémentaire est très discriminante.

Q 5 Bien réussie dans l'ensemble.

Q 6-7 Il s'agissait d'adapter le théorème fondamental de l'analyse dans le cas d'une fonction d'intégrale convergente. Les candidats attentifs ont résolu correctement cette question avec l'utilisation de la relation de Chasles ou l'introduction de primitive. Le caractère $\mathscr{C}^1$ s'obtient pour beaucoup par dérivation puis par continuité de la dérivée. L'étude du signe de la dérivée donne parfois lieu à des contorsions et tours de passe-passe, le jury les a sanctionnés.

Q 8 Bien réussie dans l'ensemble.

Partie II

Cette partie était très classique, excepté la question 13. Elle a été traitée avec succès dans bon nombre de copies.

Q 9 Résultat classique. Seul un tiers des candidats sait comment la traiter.

Q 10-11 Montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel reste délicat, en effet en dehors de la stabilité par combinaison linéaire, les autres points à démontrer sont souvent omis. Pour le produit scalaire, le caractère défini pose toujours problème. Chose étrange, un candidat sur sept évite Q 10. et passe directement à Q 11.

Q 12 Cette question a permis aux bons candidats de montrer leurs qualités.

Q 13 Très classique. En revanche beaucoup de candidats n'évoquent même pas la convergence de l'intégrale à calculer.

Q 14 Bien réussie.

Partie III

Q 15-16 Bien traitées.

Q 17 Il s'agissait comme en Q 6 d'utiliser le théorème fondamental sur un reste d'intégrale convergente. On retrouve les mêmes défauts alors que la borne posant problème était cette fois-ci explicite.

Q 18 Bien traitée dans l'ensemble.

Q 19 Question délicate. La majorité des candidats ayant traité la première majoration ont pensé à utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et souvent en adaptant correctement le produit scalaire. La seconde majoration a donné lieu à de grossières erreurs, principalement : comme f est décroissante, on a $\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(x)$.

Q 20 Il s'agissait d'utiliser les résultats de diverses questions pour appliquer la condition de la partie I.B. Il convient de les citer et de vérifier ces conditions.

Q 21 Beaucoup de calculs sur les inégalités sans justifications. On trouve des primitives exotiques pour $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$.

Q 22 Assez peu réussie. Beaucoup ne savent même pas comment étudier l'injectivité d'une application linéaire.

Q 23 Peu traitée, l'essentiel de réponses donnait un argument valable en dimension finie uniquement.

Q 24 Bien traitée. Pour les candidats dérivant l'expression, il est attendu d'évoquer la dérivabilité.

Q 25 Question simple et bien réussie dans l'ensemble, mais il faut citer les questions utilisées.

Q 26 Question délicate qui a permis aux candidats à l'aise en analyse de s'exprimer.

Q 27 L'étude en l'infini a été bien réalisée. En revanche, le comportement des fonctions de référence au voisinage de 0 est une difficulté.

Q 28 Les candidats ayant traité la question ont en général bien identifié et justifié le théorème à utiliser.

Q 29 Question bien traitée par une bonne part des candidats.

Partie IV

Q 30 Les relations à déterminer et le formalisme étant introduits dans l'énoncé, l'évaluation de cette question portait essentiellement sur la rédaction de la recherche de solution développable en série entière d'une équation différentielle. En ce sens, cette question a été discriminante, peu de candidats obtiennent tous les points. En particulier, manquent principalement les arguments de régularité de la somme et d'unicité des coefficients d'une série entière ; mais aussi l'équivalence qu'il convenait de démontrer.

Q 31 À nouveau, le raisonnement avec discussion suivant le paramètre p a posé problème. La seconde partie sur le degré et l'appartenance à E a été bien réussie par les candidats l'ayant traitée.

Q 32 Bien réussie dans l'ensemble.

Q 33 Les candidats ont presque tous utilisé un produit de fonctions développables en série entière, mais trop souvent sans préciser les rayons.

Q 34 Bien réussie.

Q 35 Même remarque que Q 33 pour le caractère développable en série entière. Le calcul a bien été discriminant et a permis de mettre en avant les candidats à l'aise dans cette compétence.

Q 36-40 Partie délicate, excepté Q 37 et Q 38, abordée par seulement un quart des candidats. Les meilleurs copies l'abordent entièrement avec succès.

Partie V

Cette dernière partie de sujet n'a été abordée que dans un quart des copies.

Q 41 Il suffisait de faire le lien avec l'injectivité établie en Q 22.

Q 42 Question relativement simple, bien réussie dans les copies l'ayant abordée.

Q 43 La difficulté portait sur la justification de l'utilisation du résultat de la partie IV.B.

Q 44 Assez bien réussie quand elle est traitée.

Q 45 Il est désarmant de constater qu'une équation différentielle à coefficients constants, en l'occurrence $y'' - y' = 0$, soit la majeure difficulté. Une fraction minime des candidats ayant abordé cette question ont réussi cette résolution.

Q 46 Peu traitée. La difficulté principale était de justifier que P_p est vecteur propre de U. Les candidats ayant abordé cette question en ont eu en revanche l'intuition. L'orthogonalité, preuve du cours, a été souvent bien faite.

Conclusion

Le jury encourage vivement les candidats à utiliser un brouillon et à ne pas commencer systématiquement la rédaction aussitôt l'énoncé lu. Il faut privilégier la qualité sur la quantité, dans la présentation et surtout dans la précision de l'argumentation. Les candidats qui avancent dans un sujet de manière presque linéaire, en donnant tous les arguments importants, qui signalent honnêtement les manques ou les incohérences de leurs propositions ont toujours d'excellentes notes.

Enfin, on ne peut qu'encourager les candidats à mettre l'accent sur le cours et les méthodes de résolutions ; ce n'est qu'en maitrisant ces points que l'on peut rechercher et proposer des solutions cohérentes à de nouveaux problèmes.