Corrigé : permutations alternantes montantes (Centrale PC 2019)

I Introduction d'une fonction auxiliaire

I. A – Dérivées successives

Q 1. On calcule successivement pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$f'(x) = \frac{\sin x + 1}{(\cos x)^2}, \qquad f''(x) = \frac{(\sin x)^2 + 2\sin x + 1}{(\cos x)^3}, \qquad f^{(3)}(x) = \frac{(\sin x)^3 + 4(\sin x)^2 + 5\sin x + 2}{(\cos x)^4}$$

Q 2. Raisonnons par récurrence sur n.

– En posant $\mathrm{P}_0 = \mathrm{X} + 1$ on prouve l'existence de P_n pour $n = 0$.

– Si $n \geqslant 0$, supposons l'existence de P_n acquise. En dérivant une fois de plus on obtient :

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(\cos x)^2 \mathrm{P}_n'(\sin x) + (n+1)\sin x \mathrm{P}_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}$$

donc il suffit de poser $\mathrm{P}_{n+1} = (1 - \mathrm{X}^2)\mathrm{P}_n' + (n+1)\mathrm{X}\mathrm{P}_n$ pour obtenir l'existence de P_{n+1}. La récurrence se propage.

La question précédente fournit : $\mathrm{P}_0 = \mathrm{X} + 1, \quad \mathrm{P}_1 = \mathrm{X} + 1, \quad \mathrm{P}_2 = \mathrm{X}^2 + 2\mathrm{X} + 1, \quad \mathrm{P}_3 = \mathrm{X}^3 + 4\mathrm{X}^2 + 5\mathrm{X} + 1.$

Q 3. Montrons la propriété demandée par récurrence sur $n \geqslant 1$.

– Si $n = 1$ le polynôme $\mathrm{P}_1 = \mathrm{X} + 1$ répond bien aux exigences.

– Si $n \geqslant 1$, supposons le résultat acquis au rang n, et posons donc $\mathrm{P}_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$ avec $a_k \in \mathbb{N}$ et $a_n = 1$.
La relation de récurrence donne :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} k a_k \mathrm{X}^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} k a_k \mathrm{X}^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} (n+1) a_k \mathrm{X}^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} \mathrm{X}^k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) a_{k-1} \mathrm{X}^k + \sum_{k=1}^{n+1} (n+1) a_{k-1} \mathrm{X}^k \\
&= a_1 + \big(2a_1 + (n+1)a_0\big)\mathrm{X} + \sum_{k=2}^{n-1} \big((k+1)a_{k+1} + (n-k+2)a_{k-1}\big)\mathrm{X}^k + 2a_{n-1}\mathrm{X}^n + a_n \mathrm{X}^{n+1}
\end{aligned}$$

et il reste à constater que P_{n+1} est bien un polynôme unitaire de degré $n+1$ à coefficients dans $\mathbb{N}$. La récurrence se propage.

Q 4. On calcule $f(x)^2 + 1 = \dfrac{(\sin x)^2 + 2\sin x + 1}{(\cos x)^2} + 1 = 2\dfrac{\sin x + 1}{(\cos x)^2} = 2f'(x)$.

Q 5. Prendre $x = 0$ dans la relation que l'on vient d'obtenir fournit l'égalité : $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$.

Pour $n \geqslant 1$, dérivons cette même relation en utilisant la formule de Leibniz ; on obtient $2f^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x)$.

Pour $x = 0$ on obtient la relation $2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}$.

I. B – Développement en série entière

Q 6. La formule de Taylor avec reste intégral donne $f(x) - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \dfrac{\alpha_n}{n!} x^n = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!} f^{(\mathrm{N}+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{(x-t)^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!} \frac{\mathrm{P}_{\mathrm{N}+1}(\sin t)}{(\cos t)^{\mathrm{N}+2}}\,\mathrm{d}t$.

Lorsque $0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}$ on a pour tout $t \in [0, x]$, $\dfrac{(x-t)^{\mathrm{N}}}{\mathrm{N}!} \geqslant 0$, $\cos t > 0$ et $\sin t \geqslant 0$ donc $\mathrm{P}_{\mathrm{N}+1}(\sin t) \geqslant 0$ *car on a montré à la question 3 que les coefficients de* $\mathrm{P}_{\mathrm{N}+1}$ *sont tous (des entiers) positifs.*

L'intégrale d'une fonction positive est positive donc $f(x) - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \dfrac{\alpha_n}{n!} x^n \geqslant 0$.

Q 7. La relation obtenue à la question 5 montre que (α_n) est une suite à valeurs positives. La question précédente montre que pour tout $x \in [0, \pi/2[$ la suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ est majorée. Étant à valeurs positives la série converge, ce qui montre que $x \leqslant \mathrm{R}$.
On a montré l'implication $\big(0 < x < \pi/2 \implies x \leqslant \mathrm{R}\big)$ donc $\mathrm{R} \geqslant \pi/2$.

Q 8. De ceci il résulte que la fonction g est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ au moins sur l'intervalle I, et que $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{n!} x^n$.
Par ailleurs, on peut réaliser le produit de Cauchy de g par elle-même sur l'intervalle I et obtenir

$$1 + g(x)^2 = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k!} \frac{\alpha_{n-k}}{(n-k)!} x^n = 1 + \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k} x^n = 2 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{n!} x^n = 2g'(x)$$

d'après la relation obtenue à la question 5.

Q 9. En dérivant que les fonctions $\arctan f$ et $\arctan g$ on constate que leurs dérivées sont toutes deux égales à la constante $1/2$, donc ces fonctions sont égales à une constante près. Or $\arctan f(0) = \arctan g(0) = \frac{\pi}{4}$ donc $\arctan f = \arctan g$, puis $f = g$.

Q 10. On a $\lim_{x \to (\pi/2)^-} g(x) = \lim_{x \to (\pi/2)^-} f(x) = +\infty$ donc même si g est définie en $\pi/2$ elle ne peut en aucun cas y être continue.
Une série entière étant continue sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ il en résulte que $\pi/2 \geqslant \mathrm{R}$, et donc que $\mathrm{R} = \pi/2$.

I. C – Partie paire et partie impaire du développement en série entière

Q 11. Si une telle décomposition existe alors $h(x) = p(x) + i(x)$ et $h(-x) = p(x) - i(x)$ donc nécessairement $p(x) = \frac{h(x) + h(-x)}{2}$ et $i(x) = \frac{h(x) - h(-x)}{2}$.
Réciproquement, les deux fonctions définies ci-dessus sont bien respectivement paire et impaire et vérifient $p + i = h$, d'où l'existence et l'unicité.

Q 12. Les fonctions $p : x \mapsto \frac{1}{\cos x}$ et $i : x \mapsto \tan x$ sont respectivement paire et impaire et vérifient $p + i = f$ donc

$$\forall x \in \mathrm{I}, \qquad \tan x = \frac{f(x) - f(-x)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\cos x} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

Q 13. t est développable en série entière donc $\frac{t^{(n)}(0)}{n!}$ est de coefficient d'ordre n de son développement. Ainsi, $t^{(2p)}(0) = 0$ et $t^{(2p+1)}(0) = \alpha_{2p+1}$.

Q 14. On a $t' = 1 + t^2$.

Q 15. Réalisons de nouveau un produit de Cauchy. Pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$\begin{aligned} 1 + t(x)^2 &= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{\alpha_{2p+1}}{(2p+1)!} \frac{\alpha_{2(n-p)+1}}{(2(n-p)+1)!} x^{2n+2} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+2)!} \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+2}{2p+1} \alpha_{2p+1} \alpha_{2n-2p+1} x^{2n+2} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} \sum_{p=0}^{n-1} \binom{2n}{2p+1} \alpha_{2p+1} \alpha_{2n-2p-1} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1} \alpha_{2n-2k+1} x^{2n} \end{aligned}$$

Par ailleurs, $t'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n)!} x^{2n}$ donc par unicité du développement en série entière on en déduit pour $n \geqslant 1$:

$$\alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1} \alpha_{2n-2k+1}$$

II Équivalent de α_{2n+1}

II. A – La fonction zêta

Q 16. Posons $f_n(s) = \dfrac{1}{n^s}$. les fonctions f_n sont continue sur $]1, +\infty[$ et pour tout $\alpha > 1$, $\|f_n\|_{\infty,[\alpha,+\infty[} = \dfrac{1}{n^\alpha}$. La série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge donc la convergence de la série $\sum f_n$ est normale et donc uniforme sur $[\alpha, +\infty[$. On en déduit que ζ est continue sur tout intervalle $[\alpha, +\infty[$ avec $\alpha > 1$, puis sur $]1, +\infty[$ par recouvrement.

Q 17. Chacune des fonctions f_n possède une limite lorsque s tend vers $+\infty$ et la convergence de $\sum f_n$ est uniforme sur $[2, +\infty[$ donc on peut appliquer le théorème de la double limite :

$$\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{s\to+\infty} f_n(s) = 1 \qquad \text{car} \qquad \lim_{s\to+\infty} f_n(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Q 18. On a $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^s} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} + \frac{1}{2^s}\zeta(s)$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} = \mathrm{C}(s)\zeta(s)$ avec $\mathrm{C}(s) = 1 - \dfrac{1}{2^s}$.

II. B – Une formule pour la fonction cosinus

Q 19. Pour $n \geqslant 2$ on effectue une intégration par parties :

$$\mathrm{I}_n(x) = \left[\frac{\sin(2xt)}{2x}(\cos t)^n\right]_0^{\pi/2} + \frac{n}{2x}\int_0^{\pi/2} \sin(2xt)\sin t(\cos t)^{n-1}\,\mathrm{d}t = \frac{n}{2x}\int_0^{\pi/2} \sin(2xt)\sin t(\cos t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$$

Effectuons une deuxième intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n(x) &= \frac{n}{2x}\left[-\frac{\cos(2xt)}{2x}\sin t(\cos t)^{n-1}\right]_0^{\pi/2} + \frac{n}{2x}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2xt)}{2x}\Big((\cos t)^n - (n-1)\sin^2 t(\cos t)^{n-2}\Big)\mathrm{d}t \\
&= \frac{n}{2x}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2xt)}{2x}\Big((\cos t)^n - (n-1)(1-\cos^2 t)(\cos t)^{n-2}\Big)\mathrm{d}t \\
&= \frac{n}{4x^2}\Big(n\mathrm{I}_n - (n-1)\mathrm{I}_{n-2}\Big)
\end{aligned}$$

On a prouvé que $\left(\dfrac{n^2}{4x^2} - 1\right)\mathrm{I}_n = \dfrac{n(n-1)}{4x^2}\mathrm{I}_{n-2}$, ce qui s'écrit aussi $\left(1 - \dfrac{4x^2}{n^2}\right)\mathrm{I}_n = \dfrac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-2}$.

Pour $x = 0$ on obtient $\mathrm{I}_n(0) = \dfrac{n-1}{n}\mathrm{I}_{n-2}(0)$ donc en faisant le quotient : $\left(1 - \dfrac{4x^2}{n^2}\right)\dfrac{\mathrm{I}_n(x)}{\mathrm{I}_n(0)} = \dfrac{\mathrm{I}_{n-2}(x)}{\mathrm{I}_{n-2}(0)}$.

Q 20. Appliqué en $2n$ cette relation s'écrit : $\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)\dfrac{\mathrm{I}_{2n}(x)}{\mathrm{I}_{2n}(0)} = \dfrac{\mathrm{I}_{2(n-1)}(x)}{\mathrm{I}_{2(n-1)}(0)}$. Par télescopage on en déduit :

$$\frac{\mathrm{I}_{2n}(x)}{\mathrm{I}_{2n}(0)}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = \frac{\mathrm{I}_0(x)}{\mathrm{I}_0(0)}$$

On calcule $\mathrm{I}_0(x) = \dfrac{\sin(\pi x)}{2x}$ si $x \neq 0$ et $\mathrm{I}_0(0) = \dfrac{\pi}{2}$ donc $\displaystyle\frac{\mathrm{I}_{2n}(x)}{\mathrm{I}_{2n}(0)}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.

Q 21. Appliqué avec $2n$ et $2x$ cette formule donne aussi $\displaystyle\sin(2\pi x) = 2\pi x\frac{\mathrm{I}_{4n}(2x)}{\mathrm{I}_{4n}(0)}\prod_{k=1}^{2n}\left(1 - \frac{4x^2}{k^2}\right)$.

Dans ce produit, séparons les termes pairs et impairs : $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n}\left(1 - \frac{4x^2}{k^2}\right) = \prod_{p=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{p^2}\right) \times \prod_{p=1}^{n}\left(1 - \frac{4x^2}{(2p-1)^2}\right)$.

Il reste à faire le quotient : $\displaystyle\cos(\pi x) = \frac{\sin(2\pi x)}{2\sin(\pi x)} = \frac{\mathrm{I}_{4n}(2x)}{\mathrm{I}_{4n}(0)}\frac{\mathrm{I}_{2n}(0)}{\mathrm{I}_{2n}(x)}\prod_{p=1}^{n}\left(1 - \frac{4x^2}{(2p-1)^2}\right)$.

II. C – Un autre développement de la tangente

Q 22. Par comparaison à une intégrale, $\displaystyle\frac{1}{(2k-1)^s} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{(2t-1)^s}$ donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(2t-1)^s} = \frac{1}{2(s-1)}\frac{1}{(2n-1)^{s-1}}$.

Q 23. Posons $f_p(x)=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{2^{2p+1}x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}}$. D'après la question précédente, $0\leqslant f_p(x)\leqslant\dfrac{2^{2p}x^{2p-1}}{(2p-1)(2n-1)^{2p-1}}$.
Ceci montre que $f_p(x)\underset{p\to+\infty}{=}\mathrm{O}(2x)^p$. Or lorsque $x\in\mathrm{J}$ la série $\sum(2x)^p$ converge; il en est donc de même de $\displaystyle\sum_p f_p(x)$, ce qui montre que S_n est bien définie sur J.

Q 24. Poursuivons la majoration : $0\leqslant f_p(x)\leqslant 2\Big(\dfrac{2x}{2n-1}\Big)^{2p-1}$, donc $0\leqslant \mathrm{S}_n(x)\leqslant 2\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\Big(\frac{2x}{2n-1}\Big)^{2p-1}$.

Lorsque $|r|<1$ on a $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}r^{2p-1}=r\sum_{p=1}^{+\infty}(r^2)^{p-1}=\frac{r}{1-r^2}$ donc ici $0\leqslant\mathrm{S}_n(x)\leqslant\dfrac{\frac{4x}{2n-1}}{1-(\frac{2x}{2n-1})^2}$ et pour $x\in\mathrm{J}$ fixé, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathrm{S}_n(x)=0$.

Q 25. D'après la question 21,

$$\ln\big(\cos(\pi x)\big)=\ln\big(\mathrm{I}_{4n}(2x)\big)-\ln\big(\mathrm{I}_{4n}(0)\big)+\ln\big(\mathrm{I}_{2n}(0)\big)-\ln\big(\mathrm{I}_{2n}(x)\big)+\sum_{k=1}^{n}\ln\Big(1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2}\Big)$$

On dérive pour obtenir : $-\dfrac{\pi\sin(\pi x)}{\cos(\pi x)}=2\dfrac{\mathrm{I}'_{4n}(2x)}{\mathrm{I}_{4n}(2x)}-\dfrac{\mathrm{I}'_{2n}(x)}{\mathrm{I}_{2n}(x)}-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{8x}{(2k-1)^2}\frac{1}{1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2}}$, ce qui donne la formule souhaitée.

Q 26. On développe en série entière $\dfrac{1}{1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2}}$ pour obtenir :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{8x}{(2k-1)^2}\frac{1}{1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{8x}{(2k-1)^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\Big(\frac{4x^2}{(2k-1)^2}\Big)^p=\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2p+3}x^{2p+1}}{(2k-1)^{2p+2}}=\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{2p+1}x^{2p-1}}{(2k-1)^{2p}}$$

(on peut intervertir car il s'agit d'une somme finie de séries convergentes).
On en déduit que $\mathrm{S}_n(x)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{8x}{(2k-1)^2}\frac{1}{1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2}}=\sum_{p=1}^{+\infty}2^{2p+1}x^{2p-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2p}}=\sum_{p=1}^{+\infty}2^{2p+1}x^{2p-1}\mathrm{C}(2p)\zeta(2p)$ d'après Q 18.
D'après cette même question Q 18 on a $\mathrm{C}(2p)=1-\dfrac{1}{2^{2p}}$, donc tout compte fait,

$$\pi\tan(\pi x)+\mathrm{S}_n(x)=-2\frac{\mathrm{I}'_{4n}(2x)}{\mathrm{I}_{4n}(2x)}+\frac{\mathrm{I}'_{2n}(x)}{\mathrm{I}_{2n}(x)}+\sum_{p=1}^{+\infty}2(2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1}$$

Q 27. Étudions $\phi: t\mapsto\sin t-t\cos t$ sur l'intervalle $[0,\pi/2]$: $\phi'(t)=t\sin t\geqslant 0$ donc ϕ est croissante. Sachant que $\phi(0)=0$ on en déduit : pour tout $t\in[0,\pi/2]$, $\phi(t)\geqslant 0$.

Q 28. Pour cette question, il faut (pour l'instant) admettre que l'on peut dériver $\mathrm{I}_n(x)$ sous le signe intégral pour obtenir $\mathrm{I}'_n(x)=-\displaystyle\int_0^{\pi/2}2t\sin(2tx)(\cos t)^n\,\mathrm{d}t$ (les 5/2 peuvent déjà le justifier, pour les 3/2 il faudra encore attendre un peu).

On en déduit à l'aide de l'inégalité précédente : $0\leqslant-\mathrm{I}'_n(x)\leqslant 2\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin(2tx)\sin t(\cos t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$.

Une intégration par parties donne : $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin(2tx)\sin t(\cos t)^{n-1}\,\mathrm{d}t=\Big[-\sin(2tx)\frac{(\cos t)^n}{n}\Big]_0^{\pi/2}+\frac{2x}{n}\int_0^{\pi/2}\cos(2tx)(\cos t)^n\,\mathrm{d}t=$ $\dfrac{2x}{n}\mathrm{I}_n(x)$, ce qui amène à l'encadrement $0\leqslant-\mathrm{I}'_n(x)\leqslant\dfrac{4x}{n}\mathrm{I}_n(x)$.
Il en résulte immédiatement que pour $x\in[0,1]$ fixé, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{I}'_n(x)}{\mathrm{I}_n(x)}=0$.

Q 29. À l'aide de la question précédente et de la question 24, on obtient en faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de la question 26 :

$$n\tan(\pi x)=\sum_{p=1}^{+\infty}2(2^{2p}-1)\zeta(2p)x^{2p-1}$$

II. D – Un équivalent de α_{2n+1}

Q 30. La formule précédente a été établie pour $x \in [0,1/2[$; elle reste vraie par imparité pour $x \in]-1/2,0]$ et donne le développement en série entière de la fonction tan sur l'intervalle $]-\pi/2,\pi/2[$ en posant $y = \pi x$, soit :

$$\tan y = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2(2^{2p}-1)\zeta(2p)}{\pi^{2p}} y^{2p-1}$$

Par unicité du développement en série entière on peut identifier les coefficients avec ceux obtenus à la question 12, soit : $\dfrac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} = \dfrac{2(2^{2n+2}-1)\zeta(2n+2)}{\pi^{2n+2}}$, ce qui donne $\alpha_{2n+1} = \dfrac{2(2^{2n+2}-1)(2n+1)!}{\pi^{2n+2}}\zeta(2n+2)$.

Q 31. D'après la question 17, $\lim \zeta(2n+2) = 1$ donc $\alpha_{2n+1} \sim 2\Big(\dfrac{2}{\pi}\Big)^{2n+2}(2n+1)!$.

On peut éventuellement utiliser la formule de Stirling en ajoutant que $(2n+1)! \sim \sqrt{4\pi n}(2n+1)^{2n+1}\,\mathrm{e}^{-2n-1}$, mais ce n'est pas indispensable.

III Permutations alternantes

III. A – Dénombrement des permutations alternantes

Q 32. Pour $n = 2$ il y a une seule permutation alternante montante : $(1,2)$.
Pour $n = 3$, il y en a deux : $(1,3,2)$ et $(2,3,1)$.
Pour $n = 4$, il y en a cinq : $(1,3,2,4)$, $(1,4,2,3)$, $(2,3,1,4)$, $(2,4,1,3)$, $(3,4,1,2)$.

Q 33. Considérons la permutation $\phi : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ définie par $\phi(k) = n+1-k$. Une permutation σ est alternante montante si et seulement si $\phi \circ \sigma$ est alternante descendante, donc l'application $\sigma \to \phi\sigma$ réalise une bijection entre l'ensemble des permutations alternantes montantes et descendantes. ces deux ensembles sont donc de même cardinal.

Q 34. Posons $\mathrm{A} = \{a_1,\dots,a_k\}$ avec $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$. Puisque $\operatorname{card} \mathrm{A} = k$, les listes $(x_1,\dots,x_k)$ d'éléments deux à deux distincts de A sont les permutations des éléments de A et peuvent donc s'écrire $(a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(k)})$ où σ est une permutation de $[\![1,k]\!]$. Cette liste est alternante montante si et seulement si σ est une permutation alternante pontante. Il y en a donc β_k.

Q 35. Soit σ une permutation de $[\![1,n+1]\!]$ telle que $\sigma(k+1) = n+1$. Puisque $n+1$ est le plus grand entier de $[\![1,n+1]\!]$, σ est une permutation alternante montante si et seulement si :

- k est un entier pair ;
- la liste $(\sigma(1),\dots,\sigma(k))$ est alternante montante ;
- la liste $(\sigma(k+2),\dots,\sigma(n+1)$ est alternante montante.

De même, elle est alternante descendante si et seulement si :

- k est un entier impair ;
- la liste $(\sigma(1),\dots,\sigma(k))$ est alternante descendante ;
- la liste $(\sigma(k+2),\dots,\sigma(n+1)$ est alternante descendante.

Pour construire une telle permutation, il suffit donc de choisir k éléments parmi $[\![1,n]\!]$ à placer avant $n+1$, les autres se plaçant après, puis les ordonner en alternance montante ou descendante suivant la parité de k. D'après la question 34 cela donne $\dbinom{n}{k}\beta_k\beta_{n-k}$ permutations alternantes. Et puisque $k \in [\![0,n]\!]$, le nombre total de permutations alternantes, par ailleurs égal par définition à $2\beta_{n+1}$, vaut :

$$2\beta_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\beta_k\beta_{n-k}$$

Q 36. Sachant que $\alpha_0 = \beta_0 = 1$ et $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, les questions 5 et 35 permettent de prouver sans peine par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \beta_n$.

III. B – Permutations aléatoires

Q 37. Par définition on a $p_n = \dfrac{\beta_n}{n!} = \dfrac{\alpha_n}{n!}$.

La question 7 a montré que le rayon de convergence de $\sum \dfrac{\alpha_n}{n!}x^n$ est supérieur ou égal à $\dfrac{\pi}{2} > 1$ donc la série $\sum \dfrac{\alpha_n}{n!}$ converge, et par voie de conséquence $\lim p_n = \lim \dfrac{\alpha_n}{n!} = 0$.

Enfin, la question Q31 a prouvé l'équivalent $\alpha_{2n+1} \sim 2\Big(\dfrac{2}{\pi}\Big)^{2n+2}(2n+1)!$ donc $p_{2n+1} \sim 2\Big(\dfrac{2}{\pi}\Big)^{2n+2}$.

Q 38. On a $\mathrm{M}_n > i$ si et seulement si $(\sigma(1), \dots, \sigma(i))$ est alternante montante donc $\mathbb{P}(\mathrm{M}_n > i) = p_i$.

Q 39. On a $\mathbb{E}(\mathrm{M}_n) = \sum_{i=2}^{n+1} i\mathbb{P}(\mathrm{M}_n = i) = \sum_{i=2}^{n+1} i\Big(\mathbb{P}(\mathrm{M}_n > i-1) - \mathbb{P}(\mathrm{M}_n > i)\Big) = \sum_{i=1}^{n}(i+1)\mathbb{P}(\mathrm{M} > i) - \sum_{i=2}^{n+1} i\mathbb{P}(\mathrm{M} > i)$ Sachant que

$$= 2\mathbb{P}(\mathrm{M} > 1) + \sum_{i=2}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{M} > i) - (n+1)\mathbb{P}(\mathrm{M} > n+2)$$

$\mathbb{P}(\mathrm{M} > n+2) = 0$ et $\mathbb{P}(\mathrm{M} > 1) = p_1 = p_0$ donc : $\mathbb{E}(\mathrm{M}_n) = \sum_{i=0}^{n} p_i$.

On a ainsi $\mathbb{E}(\mathrm{M}_n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha_i}{i!}$ donc $\lim \mathbb{E}(\mathrm{M}_n) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\alpha_i}{i!} = f(1) = \frac{1+\sin 1}{\cos 1}$.

Rapport de l'épreuve

Présentation du sujet Le sujet de cette année propose de démontrer des résultats classiques sur les valeurs de la fonction ζ aux entiers pairs et ses liens avec le développement en série entière de la fonction tangente. La question Q30 donne un résultat complet sur les $\zeta(2n)$ — les $\zeta(2n+1)$ étant encore aujourd'hui le sujet de nombreuses conjectures. Enfin, une relation avec un problème de dénombrement (suites alternantes d'entiers distincts) donne l'occasion de calculer des probabilités.
Outre les connaissances testées, certaines questions demandent un minimum d'imagination tandis que d'autres exigent soin et persévérance dans les calculs.

Analyse globale des résultats Si on ne discerne pas de lacune particulière dans la formation des candidats, il reste que certains points apparaissent mal maitrisés dès lors qu'il faut s'écarter des applications les plus communes. Beaucoup d'erreurs semblent simplement provenir d'un défaut de pratique de certains aspects : erreurs dans la manipulation des indices ou des variables, bornes des domaines de définition ou de validité des formules, calculs algébriques sur les fonctions trigonométriques. Cela sera détaillé au niveau de chaque question dans ce qui suit.
C'est surtout dans ce qu'on appelle « la forme » que des progrès importants restent à faire. Trop de candidats répondent aux questions par une série d'égalités sans autre commentaire qu'une phrase de conclusion. Il est au contraire essentiel de justifier chaque étape d'une démonstration par un bref appel aux résultats du cours ou du problème. Dans ce dernier cas, on doit impérativement donner le numéro de la question invoquée, même si elle est très proche. Cela va bien au-delà d'une simple question de présentation et même au-delà de la seule mention des idées classiques utilisées. Ainsi qu'on peut le voir pour certaines questions du problème de cette année la verbalisation d'idées simples mais pas forcément banales est une compétence essentielle.
Sur la présentation strictement matérielle on ne peut que réitérer le conseil d'utiliser une présentation claire avec des encadrés intelligemment choisis, sans parler de l'utilisation d'une encre assez foncée.
Les remarques qui précèdent et celles qui vont suivre ont pour but d'aider les candidats moyens à améliorer substantiellement leur prestation.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

I Introduction d'une fonction auxiliaire

I.A Dérivées successives

Q1. Les candidats gagneraient à simplifier progressivement leurs calculs. La suite du sujet permettait d'orienter la simplification vers une suppression des $\cos x$.

Q2. Confusion fréquente entre $\mathrm{P}(\sin x)$ et $\mathrm{P} \times \sin x$. On remarque une maladresse à passer de polynômes en $\sin x$ à des polynômes en X.

Q3. Très peu de justifications que les coefficients sont positifs ou nuls, ce qui demandait un calcul explicite des coefficients.

Q5. Il n'est pas vrai que toute assertion dépendant d'un entier se démontre par récurrence ! Il est important de parler ici de formule de Leibniz, sans quoi il n'est pas clair du tout pour le lecteur de deviner la méthode employée.

I.B Développement en série entière

Q6. Beaucoup d'erreurs dans la formule de Taylor avec reste intégral. Certains utilisent la positivité de $f^{(n)}$ invoquant le fait que P_n est à coefficients strictement positifs, même s'ils ont négligé ce point auparavant.

Q7. Ici il convient de considérer $\sum \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ simplement comme une série et il est crucial qu'elle soit à termes positifs, sans quoi le fait que les sommes partielles sont bornées est à priori sans conséquence. On pourrait bien sûr arguer que cela implique que $\left(\frac{\alpha_n}{n!}x^n\right)_n$ est toujours bornée pour $x \in [0, \pi/2[$ et en déduire que la série entière converge sur ce même intervalle ouvert… mais on n'a pas vu cet argument.

Q8. Les formules de dérivation terme à terme et du produit de Cauchy sont rarement justifiées.

Q9. Ne pas oublier de considérer les conditions initiales. Notons que le théorème de Cauchy linéaire (le seul au programme) ne s'applique pas ici ($y' = \mathrm{F}(y)$ avec F non linéaire).

Q10. Le fait que f n'a pas de limite finie en $\pi/2$ ne prouve rien à priori sur la convergence de la série. Le bonne approche consistait à raisonner par l'absurde.

I.C Partie paire et partie impaire du développement en série entière

Q11. Une question généralement bien traitée. Des confusions toutefois chez certains candidats qui y voient une question sur les séries entières ou ignorent le sens de fonctions « paires » et « impaires ».

Q12. Idéalement, il faudrait justifier pourquoi la partie paire/impaire d'une fonction développable en série entière est donnée par la somme des termes pairs/impairs de son développement. On pouvait d'ailleurs calculer $f(x) \pm f(-x)$ et simplifier pour obtenir les formules attendues.

Q13. Le taux d'échec à cette question a été une grande surprise pour les correcteurs. Les candidats font preuve d'une grande maladresse pour interpréter la formule qu'ils viennent de démontrer et oublient qu'on ne leur demande qu'une valeur en 0. De nombreuses confusions d'indice, le même entier étant appelé indifféremment n ou $2n+1$ dans la même égalité.

Q15. Ici il est important d'expliquer ce que l'on fait, calculer ne suffit pas. Un raisonnement expéditif « par analogie avec Q5 » n'était certes pas suffisant, mais il était bienvenu d'alléger les calculs en expliquant la similarité avec ceux de Q5.

II Équivalent de α_{2n+1}

II.A La fonction zêta

Q16. Le théorème de continuité des séries de fonctions est bien connu des candidats. Attention à la convergence uniforme, seulement sur tout segment ici, ce qui n'implique pas la convergence uniforme sur $]1, +\infty[$ mais suffit pour la continuité. Un nombre appréciable de candidats rappellent le caractère local de la continuité.

Q17. Bien traitée, parfois accompagnée de dessins très bienvenus. Quelques erreurs récurrentes : inégalités dans le mauvais sens, primitives incorrectes, oubli de passer à la limite.

Q18. La majorité des copies ont tenté d'extraire $\mathrm{C}(s)$ par inversion du produit de Cauchy ; la séparation en pair/impair ne pose pas de problème de fond ici (série à termes positifs), mais cette étape mérite tout de même une justification. Erreur fréquente : ζ n'est pas une somme de série entière, en tout cas pas sous la forme donnée.

II.B Une formule pour la fonction cosinus

Q19. Le cas des intégrales de Wallis semble inspirer les candidats, qui posent généralement les bonnes intégrations par parties. La seconde nécessite un soin particulier sur les signes et les facteurs x et $1/n$. Il était possible d'éviter de traiter séparément le cas $x \neq 0$, en intégrant $x^2\mathrm{I}_{n-2}$ par exemple, ou en justifiant la continuité en $x = 0$; la plupart des copies n'ont pas vu cet écueil.

Q20. Le « télescopage » aurait mérité une rédaction plus soigneuse, la formule étant fournie de toute façon. Erreur fréquente dans le calcul de $\mathrm{I}_0(x)$: $\sin(\pi x)/\pi$ au lieu de $\sin(\pi x)/2$ (confusion entre la variable d'intégration t et le paramètre x).

Q21. Question d'un abord difficile, contournée par la plupart des candidats.

II.C Un autre développement de tangente

Q22. Question où on reprend avec succès la méthode de Q17.

Q23. Question difficile car légèrement différente des questions classiques sur les séries. La positivité des termes pouvait simplifier les considérations mais cela a été peu vu.

Q24. Erreur très fréquente : interversion somme-limite non justifiée.

Q25. Pas de difficulté notable mais un manque de soin dans la rédaction (quantificateurs, simplifications hâtives, signes, emploi des questions précédentes), alors que la formule est donnée.

Q26. Très peu abordée.

Q27. Question facile mais parfois bâclée.

Q28. La plupart des copies qui abordent cette question se limitent à déduire le second point du premier.

Q29. La formule étant donnée, il est dommage que les candidats ne justifient que très peu (voire pas) l'emploi des questions précédentes, en particulier quand il s'agit de passer de x à $2x$ dans les formules.

II.D Un équivalent de α_{2n+1}

Q30. Un beau résultat hélas peu abordé.

Q31. Presque aucun candidat n'essaye de simplifier l'équivalent de Stirling appliqué à $(2n+1)!$.

III Permutations alternantes

III.A Dénombrement des permutations alternantes

Q32. Beaucoup de trouvent que quatre permutations alternantes montantes pour $n = 4$.

Q33. La solution générale consistant à remplacer a_i par $n+1-a_i$ n'a été aperçue que dans les toutes meilleures copies. Beaucoup de candidats pensent plutôt à inverser l'ordre des a_i, certains réalisant alors que cela ne fonctionne que pour n pair. Pour n impair, le processus qui consiste à envoyer une permutation alternante $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ sur celle des deux permutations $(a_n, a_1, \dots, a_{n-1})$ ou $(a_2, \dots, a_n, a_1)$ qui est aussi alternante est effectivement une involution qui échange les descendantes et les montantes, mais aucun candidat ne le justifie.

Q34. Il s'agissait de réindexer dans l'ordre strictement croissant les valeurs ; souvent les copies se contentent d'étiqueter arbitrairement les éléments.

Q35. Rarement abordée mais quelques bon arguments. Les candidats ont des difficultés pour décrire des opérations finalement peu classiques, la justification du facteur 2 étant particulièrement malaisée.

Q36. La récurrence (forte !) était simple à rédiger, raison de plus pour ne pas l'expédier d'un « par une récurrence immédiate ». Importance ici de bien citer les questions invoquées.

III.B Permutations aléatoires

Questions peu abordées.

Conclusion Outre les recommandations déjà données en introduction, on ne peut que conseiller de lire chaque partie du sujet avant d'essayer de résoudre les questions. La vue d'ensemble ainsi obtenue est souvent une bonne source d'inspiration.
Les résultats de cette année montrent une dispersion marquée avec un quart supérieur assez étalé culminant en quelques très bonnes copies.
En conclusion, sur un énoncé qui testait des aspects variés du programme de PC, on ne relève pas de lacune particulièrement récurrente. C'est plutôt le niveau de familiarité, ou simplement de pratique, des théorèmes et des méthodes qui semble faire la différence entre les candidats.